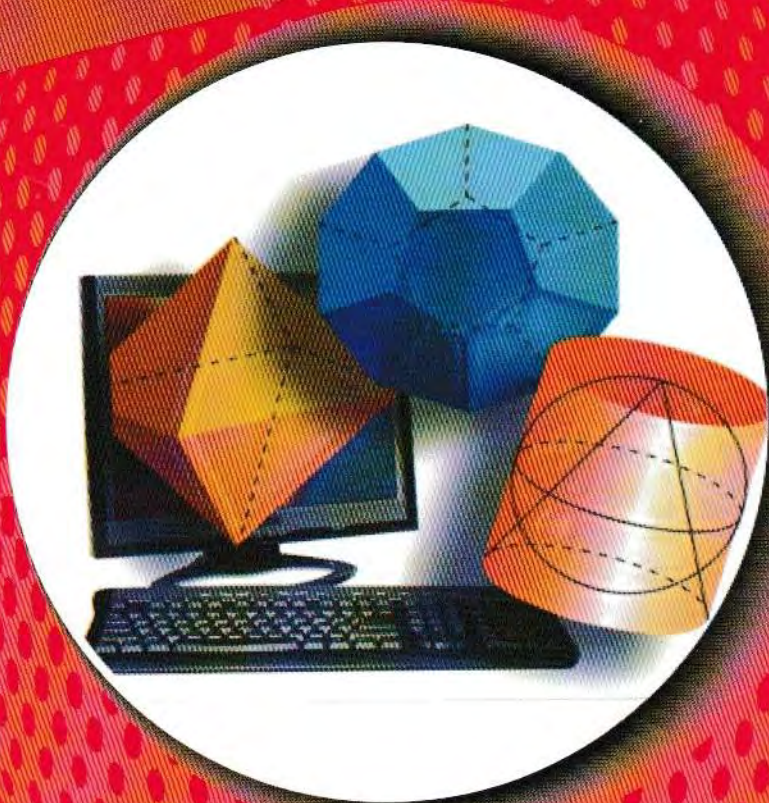


6

Relaciones Métricas

Teoría y Práctica

GEOMETRÍA



¡Full CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Luis Lazo Gutierrez

FONDO EDITORIAL
RODO

6

Relaciones Métricas

Teoría y Práctica

G
E
O
M
E
T
R
Í
A



¡FUI CEPRES!
+ EXAMENES DE ADMISION

Luis Lazo - Manuel Guevara

FONDO EDITORIAL
AROD



PRESENTACIÓN

El **Fondo Editorial RODO** es un grupo educativo con formado por profesionales de experiencia que por muchos años vienen participando en el análisis y producción de textos acordes con las necesidades del sistema educativo. Conocedores de la realidad de nuestro educando que día a día nos muestra la interacción con ellos en las aulas de clase y poniendo de manifiesto nuestro compromiso como educadores hemos asumido el reto de contribuir a elevar el nivel académico de manera integral.

Continuando con la elaboración de nuestra colección con miras al ciclo académico 2014, en esta oportunidad presentamos el texto teórico - práctico denominado **TEMAS SELECTOS DE GEOMETRÍA**, desarrollado con la gran experiencia de nuestro grupo humano. Caracterizándolo así por el rigor y la exigencia académica, ya que abarca los temas y preguntas solicitadas según la currícula de los centros preuniversitarios de las universidades más importantes del país relacionados con el curso.

Esta obra es la continuación de nuestra serie de publicaciones, caracterizada por la calidad e innovación constatada en los miles de ingresantes que han tenido como apoyo nuestras colecciones, esperando los comentarios y sugerencias las cuales sabremos aceptar

La presente serie de boletines consta de una sección teórica, donde se muestra toda la teoría referente al capítulo o capítulos mostrados en el boletín, luego se determina una sección de 100 problemas resueltos por los autores clasificados por nivel de exigencia de menor a mayor dificultad, explicados de manera clara y sencilla que servirá tanto para alumnos que recién empiezan su camino a la universidad, como alumnos de nivel avanzado, dándole nuevas alternativas de solución, luego se cuenta con 100 problemas propuestos con sus respectivas claves para que el alumno mida su nivel de comprensión respecto al capítulo con problemas de igual exigencia que la sección anterior, por último se muestra una sección de exámenes de admisión del curso en mención, con soluciones explicadas de la mejor manera.

RELACIONES MÉTRICAS



GEOMETRÍA- TEMA SELECTO 06, 1ra Edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, tampoco su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del copyright.

DERECHOS RESERVADOS © Mayo 2014 por

FONDO EDITORIAL RODO

de Walter Z. Benitez Nuñez

Av. Venezuela 979 Of. 205 - Breña

LIMA 05, PERÚ ☎ 424-6350 📠 992-796104

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

Nº: 2014 - 07661

EQUIPO PEDAGÓGICO

Luis Lazo

Manuel Guevara

DIAGRAMACIÓN, DIGITACIÓN Y GRÁFICOS

José Miguel Gallo Ballena

Víctor Meneses Huamán

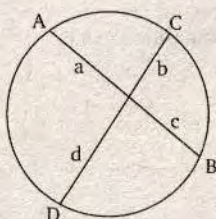
IMPRESO EN PERÚ PRINTED IN PERÚ

Impreso en los Talleres Gráficos de **CORPORACIÓN PIANCASH S. A. C.**

Jr. Chancay 446 Of. 112 - Lima 01

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA**Teorema de las cuerdas**

Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de las longitudes de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de las longitudes de los segmentos que se determinan en la otra.



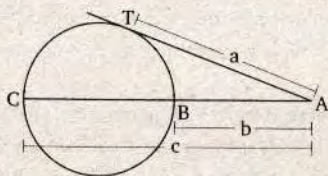
En el gráfico:

$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$: cuerdas

$$ac = bd$$

Teorema de la tangente

Si de un punto se trazan una tangente y una secante a una circunferencia, el cuadrado de la longitud del segmento tangente es igual al producto de las longitudes del segmento secante y su correspondiente parte externa.



En el gráfico:

$\overline{AT}$: Segmento tangente

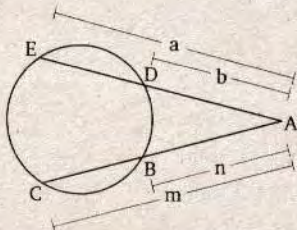
$\overline{AC}$: Segmento secante

T: punto de tangencia

$$a^2 = bc$$

Teorema de las secantes

Si de un punto se trazan dos secantes a una circunferencia, el producto de longitudes de una de las secantes y su parte externa es igual al producto de la otra secante y su correspondiente parte externa.



En el gráfico:

$\overline{AE}$ y $\overline{AC}$: Segmentos secantes

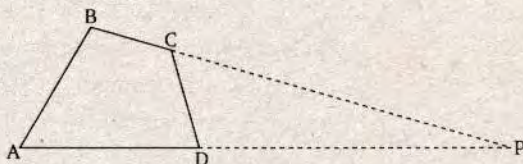
$$ab = mn$$

Corolario

Si los lados opuestos de un cuadrilátero inscriptible se prolongan hasta cortarse, el producto de las distancias del punto de corte a dos vértices colineales con él es igual al producto de las distancias del punto a los otros dos vértices colineales con él.

ABCD: cuadrilátero inscriptible

Los lados opuestos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se prolongan hasta cortarse en P



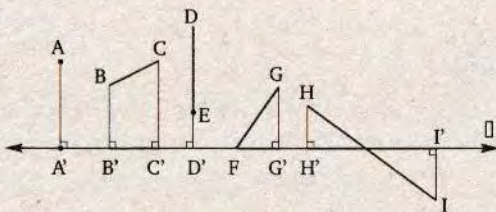
Se cumple:

$$PB \cdot PC = PA \cdot PD$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UNA RECTA

Se denomina proyección ortogonal de un punto sobre una recta al pie de la perpendicular trazada del punto a la recta, los puntos que pertenecen a la recta son proyecciones de sí mismos.

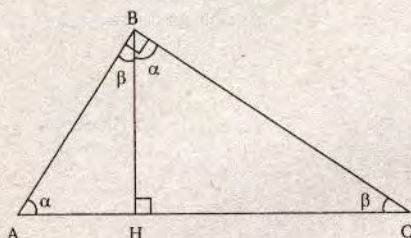
Se denomina proyección de un segmento sobre una recta a la porción de recta comprendida entre las proyecciones de los extremos del segmento, esta proyección es también un segmento excepto cuando el segmento que se proyecta es perpendicular a la recta, en tal caso la proyección es un punto.



- A' : Proyección de A sobre l
 $\overline{B'C'}$: Proyección de $\overline{BC}$ sobre l
 D' : Proyección de $\overline{DE}$ sobre l
 $\overline{FG'}$: Proyección de $\overline{FG}$ sobre l
 $\overline{H'I'}$: Proyección de $\overline{HI}$ sobre l

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

En todo triángulo rectángulo; al trazar la menor altura se forman dos triángulos los cuales son semejantes al triángulo rectángulo dado.



En el triángulo rectángulo ABC:

$\overline{AB}$ y $\overline{BC}$: Catetos

$\overline{AC}$: Hipotenusa

$\overline{BH}$: Altura (menor)

$\overline{AH}$: Proyección ortogonal de AB sobre AC

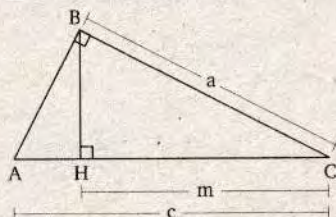
$\overline{CH}$: Proyección ortogonal de BC sobre AC

Se cumple:

$$\triangle ABC \sim \triangle AHB \sim \triangle BHC$$

Teorema

El cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa y la proyección del cateto sobre la hipotenusa.



En el gráfico:

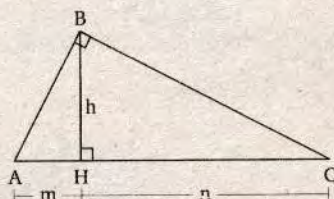
$\overline{HC}$: Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

Se cumple:

$$a^2 = cm$$

Teorema

El cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa.



En el gráfico:

$\overline{AH}$: Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

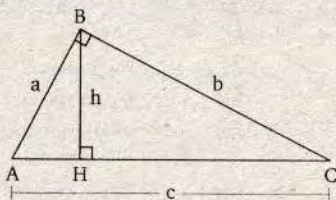
$\overline{HC}$: Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

Se cumple:

$$h^2 = mn$$

Teorema

El producto de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al producto de la hipotenusa y la altura relativa a esta.



En el gráfico:

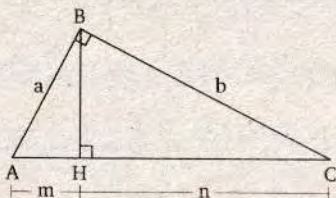
$\overline{BH}$: Altura relativa a $\overline{AC}$

Se cumple:

$$ab = ch$$

Teorema

Los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo son proporcionales a sus respectivas proyecciones sobre la hipotenusa.



En el gráfico:

$\overline{AH}$: Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

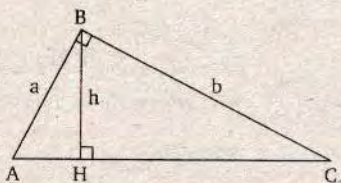
$\overline{HC}$: Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

Se cumple:

$$\frac{m}{n} = \frac{a^2}{b^2}$$

Teorema

El inverso del cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los inversos de los cuadrados de los catetos.



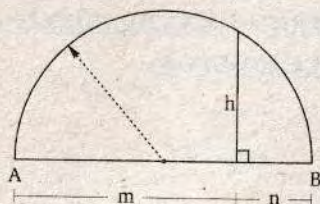
En el gráfico:

$\overline{BH}$: Altura relativa a $\overline{AC}$

Se cumple:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

a)



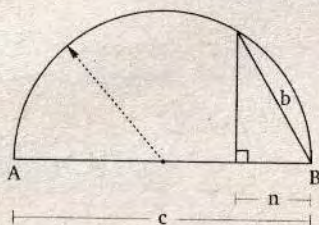
En el gráfico:

$\overline{AB}$: Diámetro

Se cumple:

$$h^2 = mn$$

b)



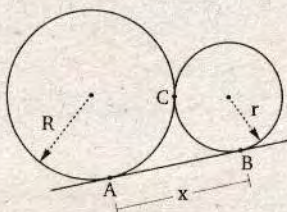
En el gráfico:

$\overline{AB}$: Diámetro

Se cumple:

$$b^2 = cn$$

c)



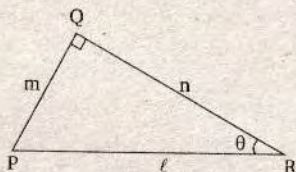
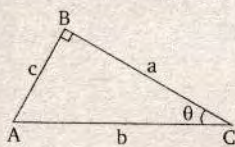
En el gráfico:

A, B y C: Puntos de tangencia

Se cumple:

$$x = 2\sqrt{Rr}$$

d)



Observe que:

$\triangle ABC \sim \triangle PQR$

Se cumple:

$$an + cm = b\ell$$

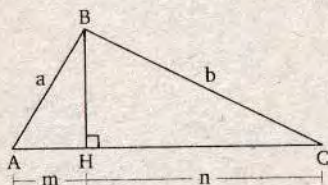
(Teorema de Dostor)

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS

OBLICUÁNGULOS

Teorema de las proyecciones

La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual a la diferencia de los cuadrados de sus respectivas proyecciones sobre el tercer lado.

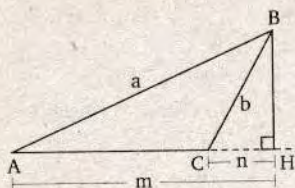


$\overline{AH}$: Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

$\overline{HC}$: Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

Se cumple:

$$b^2 - a^2 = n^2 - m^2$$



$\overline{AH}$: Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

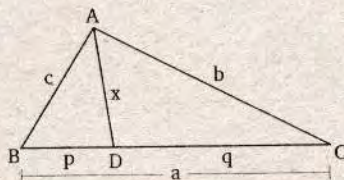
$\overline{HC}$: Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

Se cumple:

$$a^2 - b^2 = m^2 - n^2$$

Teorema de Stewart

Si a , b y c son las longitudes de los lados BC , CA y AB de un triángulo ABC , y si D es un punto cualquiera de $\overline{BC}$ tal que $BD = p$ y $DC = q$, entonces representando por x la longitud de $\overline{AD}$, tenemos:

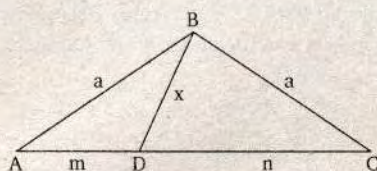


Se cumple:

$$c^2q + b^2p = x^2a + pqa$$

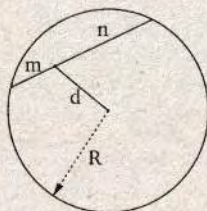
Corolarios:

1)



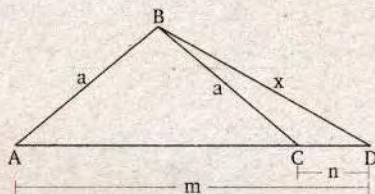
$$x^2 = a^2 - mn$$

2)



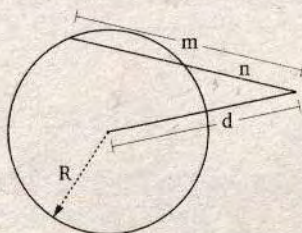
$$mn = R^2 - d^2$$

3)



$$x^2 = a^2 + mn$$

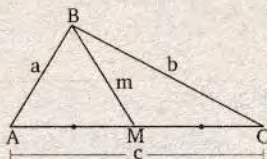
4)



$$mn = d^2 - R^2$$

Teorema de la mediana

La suma de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual a la suma del doble del cuadrado de la mediana relativa al tercer lado y la mitad del cuadrado de dicho lado.

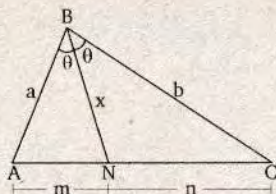


$\overline{BM}$: Mediana relativa al lado $\overline{AC}$

$$a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{c^2}{2}$$

Teorema de la bisectriz (interior)

El cuadrado de una bisectriz interior es igual a la diferencia entre el producto de los lados concurrentes con la bisectriz y el producto de los segmentos determinados por la bisectriz sobre el tercer lado.

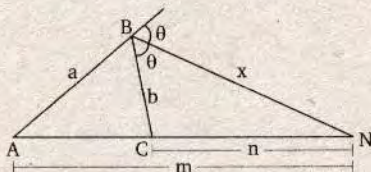


$\overline{BN}$: Bisectriz interior relativa al lado $\overline{AC}$

$$x^2 = ab - mn$$

Teorema de la bisectriz (exterior)

El cuadrado de una bisectriz exterior es igual a la diferencia entre el producto de los segmentos determinados por la bisectriz sobre el lado al cual es relativa y el producto de los lados concurrentes con la bisectriz.

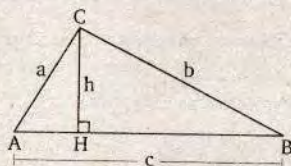


$\overline{BN}$: Bisectriz exterior relativa al lado $\overline{AC}$

$$x^2 = mn - ab$$

Teorema de Herón

La altura de un triángulo es igual al doble del producto del inverso del lado al cual es relativa y la raíz cuadrada del producto del semiperímetro del triángulo y las diferencias entre este y cada uno de los lados.



$\overline{CH}$: Altura relativa al lado $\overline{AB}$

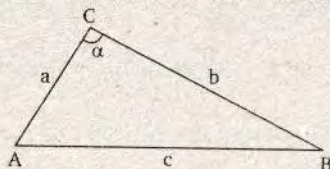
p : semiperímetro

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$h = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ley de Cosenos

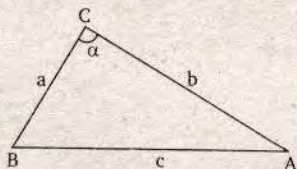
El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble del producto de dichos lados y el coseno del ángulo determinado por estos.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

Naturaleza de un triángulo

Un triángulo es acutángulo, rectángulo u obtusángulo según el cuadrado de su mayor lado sea menor, igual o mayor que la suma de cuadrados de los otros dos lados.



Sea $c > a$ y $c > b$ ($\overline{AB}$: lado mayor)

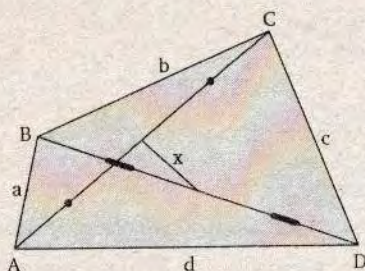
Si $c^2 < a^2 + b^2$ entonces $\triangle ABC$ acutángulo ($\alpha < 90^\circ$)

Si $c^2 = a^2 + b^2$ entonces $\triangle ABC$ rectángulo ($\alpha = 90^\circ$)

Si $c^2 > a^2 + b^2$ entonces $\triangle ABC$ obtusángulo ($\alpha > 90^\circ$)

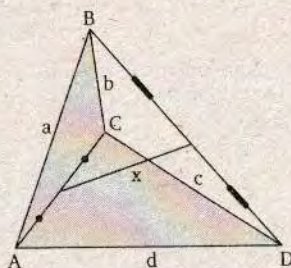
RELACIONES MÉTRICAS EN CUADRILÁTEROS**Teorema de Euler**

En todo cuadrilátero, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales más el cuádruplo del cuadrado de la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.



ABCD: Cuadrilátero convexo

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4x^2$$

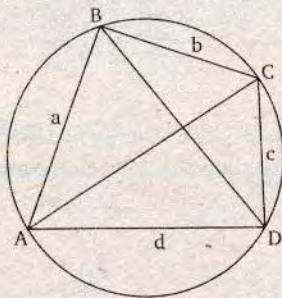


ABCD: Cuadrilátero no convexo

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4x^2$$

Teorema de Ptolomeo

Si a , b , c y d son las longitudes de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ de un cuadrilátero inscrito o inscriptible; entonces tenemos:



ABCD: Cuadrilátero inscrito

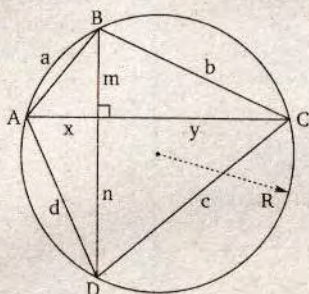
Se cumple:

$$(AC)(BD) = ac + bd$$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

Teorema de Arquímedes - Faure:

En todo cuadrilátero inscrito de diagonales perpendiculares se cumple que la suma de cuadrados de sus lados opuestos es igual al cuadrado del diámetro de la circunferencia circunscrita.



ABCD: Cuadrilátero inscrito de diagonales perpendiculares

Se cumple:

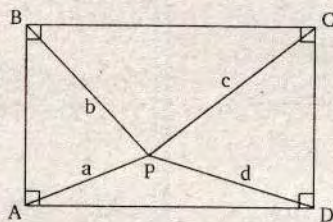
$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 4R^2$$

Además

$$x^2 + m^2 + y^2 + n^2 = 4R^2$$

Teorema de Marlen

Si a, b, c y d son las distancias de un punto P hacia los vértices de un rectángulo o un cuadrado; entonces tenemos:



ABCD: Rectángulo

P: Punto cualquiera

Se cumple:

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$$

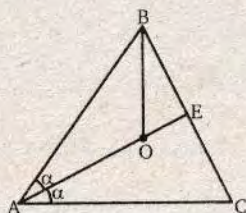
PROBLEMAS RESUELTOS

1. La suma de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo es 200. Calcule la longitud de la hipotenusa.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 12 E) 25

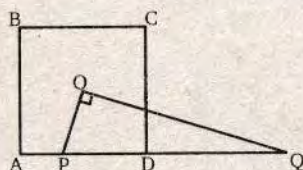
2. Según el gráfico $OE = \frac{OA}{3} = 2$, calcule

la longitud de $\overline{BO}$ siendo O ortocentro del triángulo ABC.



A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{2}$ E) 4

3. ABCD es un cuadrado de centro O, $AD=8$; $DQ=12$. Calcule OP.

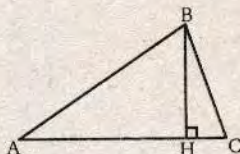


A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{13}$ C) 4
D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{19}$

4. En el triángulo rectángulo ABC;

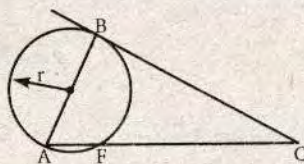
$$AC = \sqrt{18} \text{ y } BC = \sqrt[3]{3}$$

Calcule la longitud de la proyección de $\overline{HC}$ sobre $\overline{BC}$.



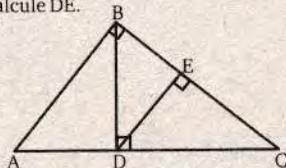
A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{6}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{3}$

5. En el gráfico, B es punto de tangencia $AF=6$ y $AC=18$. Calcule "r".



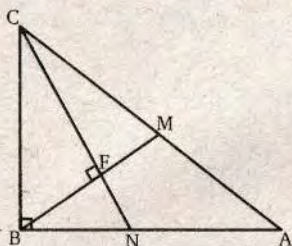
A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

6. En el gráfico, si $AD=3$ cm y $DC=5$ cm, calcule DE.



A) $\sqrt{6}/2$ B) $5/3$ C) $\sqrt{6}$
D) $5\sqrt{6}/4$ E) $2\sqrt{6}$

7. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se traza la mediana BM ($M \in AC$); luego se traza la ceviana $CN \perp BM$ ($CN \cap BM = F$). Calcule AC si $BC = 3\sqrt{10}$; $FM = 12$; $CF = 9(FN)$.

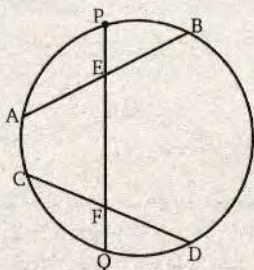


- A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 45

8. En el gráfico:

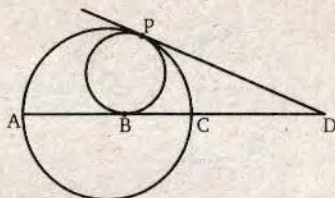
$$\frac{EF}{2} = AE = EB = CF = FD = a; \text{ calcule}$$

EP.



- A) $(\sqrt{3} + 1)a$ B) $(\sqrt{2} - 1)a$
C) $(2\sqrt{2} - 1)a$
D) $(2\sqrt{2} + 1)a$ E) $(2\sqrt{3} - 1)a$

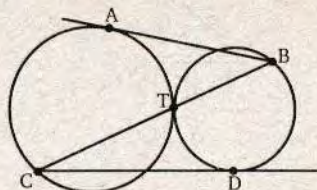
9. Si P y B son puntos de tangencia. Calcule CD, si: $AB = 4$ y $BC = 3$.



- A) 6 B) 4 C) 8
D) 9 E) 12

10. Según el gráfico T es punto de tangencia:

$AB = 2$ y $CD = 3$. Calcule BC.

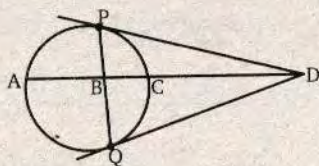


- A) $2\sqrt{5}$ B) $\sqrt{11}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{6}$ E) $\sqrt{13}$

11. En un triángulo ABC, calcule la altura de mayor longitud si $AB = 8$ cm, $BC = 9$ cm y $AC = 7$ cm.

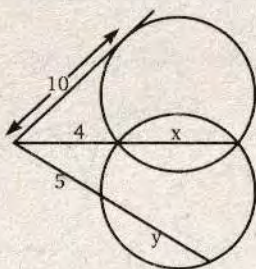
- A) $\frac{12\sqrt{5}}{7}$ B) $\frac{\sqrt{5}}{7}$ C) $\frac{24\sqrt{5}}{7}$
D) $\frac{\sqrt{7}}{5}$ E) $\sqrt{7}$

12. Si P y Q son puntos de tangencia;
 $AB=4$ y $CD=6$. Calcule BC.



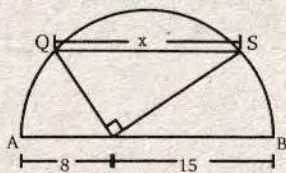
- A) 2 B) 3 C) 1
 D) 2,3 E) 2,5

13. Calcular "x+y"



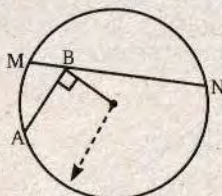
- A) 28 B) 32 C) 36
 D) 42 E) 44

14. Según el gráfico calcule el valor de x,
 si AB es diámetro. Dato: $\overline{QS} \parallel \overline{AB}$



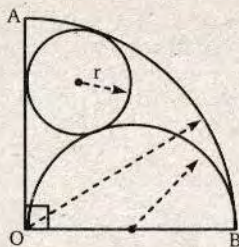
- A) 16 B) 17 C) 18
 D) 19 E) 20

15. Del gráfico, $AB=4$ y $MN=10$. Calcule BM.



- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
 D) $2\sqrt{2}$ E) 3

16. De acuerdo al gráfico $OB=16$; calcule el valor de r:

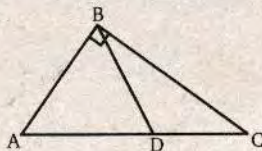


- A) 4 B) 6 C) 5
 D) 7 E) 6

17. Los lados de un triángulo ABC miden
 $AB=3$ cm, $BC=4$ cm, $AC=2$ cm.
 Calcule la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{3}{2}$ E) 1

18. Calcule la longitud del segmento $\overline{BD}$; si $AD=BC=2$ y $CD=0,5$.

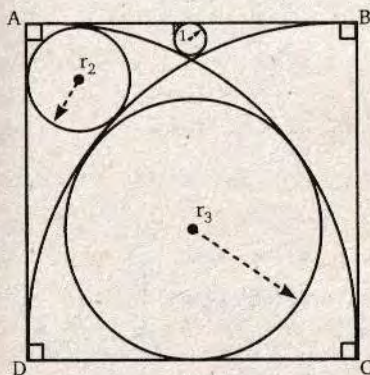


- A) $\frac{\sqrt{219}}{5}$ B) $\frac{\sqrt{247}}{10}$ C) $\frac{\sqrt{263}}{5}$
D) $\frac{\sqrt{53}}{10}$ E) $\frac{\sqrt{265}}{10}$

19. En un triángulo ABC, si $AB=4$ cm, $BC=6$ cm, $AC=5$ cm, calcule la longitud de la proyección de la mediana $\overline{BM}$ sobre $\overline{AC}$.

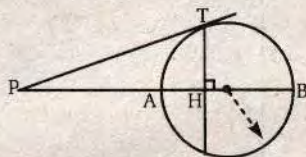
- A) 1 B) 2 C) 3
D) 2,5 E) 1,5

20. Según el gráfico $r_3=18$ cm; calcule r_1+r_2 (ABCD es un cuadrado)



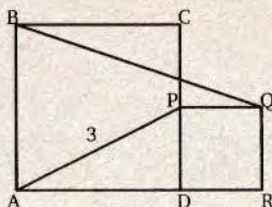
- A) 12 cm B) 10 cm C) 11 cm
D) 13 cm E) 9 cm

21. En el gráfico, T es punto de tangencia. Si $PA=4$ cm y $AH=3$ cm, calcule TB.



- A) $3\sqrt{15}$ B) $6\sqrt{14}$ C) $2\sqrt{7}$
D) $5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{14}$

22. Sea ABCD y PQRD dos cuadrados. Calcule BQ.

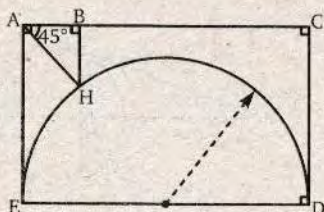


- A) 4 B) 5 C) 6
D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

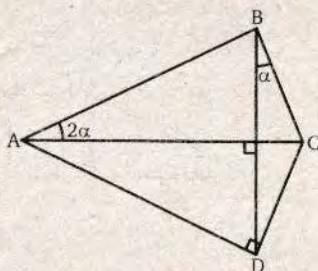
23. En un triángulo ABC se trazan la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$ tal que $BH=20$ cm y $HC=4AH$. Halle la longitud de la proyección ortogonal de $\overline{BH}$ sobre $\overline{BM}$.

- A) 16 cm B) 15 cm
C) 14 cm
D) 17 cm E) 18 cm

24. Del gráfico, $BC = AB + CD$, calcule $m\widehat{EH}$.

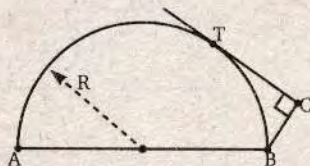


- A) $\frac{37^\circ}{2}$ B) 30° C) 37°
D) 45° E) 53°
25. En la figura, $CD = 3\text{cm}$. Halle BC.

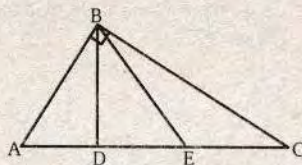


- A) $4\sqrt{3}\text{ cm}$
B) $3\sqrt{3}\text{ cm}$
C) $4\sqrt{2}\text{ cm}$
D) $2\sqrt{2}\text{ cm}$
E) $3\sqrt{2}\text{ cm}$

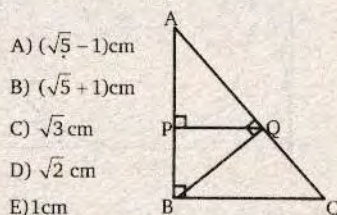
26. Según el gráfico T es punto de tangencia donde $R = 9$ y $BC = 8$. Calcule la distancia de T en $\widehat{AB}$.



- A) $3\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{5}$
D) 6 E) 8
27. En la figura, $BD = 2\text{ cm}$, $BE = 3\text{ cm}$ y $AD = DE = EC$. Halle AD.



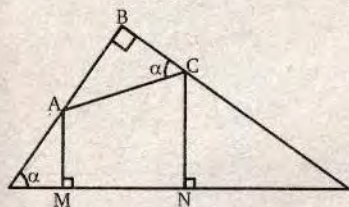
- A) $\sqrt{\frac{12}{5}}\text{ cm}$ B) $\frac{4}{\sqrt{5}}\text{ cm}$ C) $\sqrt{\frac{17}{5}}\text{ cm}$
D) $\sqrt{\frac{13}{5}}\text{ cm}$ E) $\sqrt{\frac{14}{5}}\text{ cm}$
28. En la figura, $PQ = QC$ y $AQ = 2\text{ cm}$. Halle QC.



- A) $(\sqrt{5} - 1)\text{ cm}$
B) $(\sqrt{5} + 1)\text{ cm}$
C) $\sqrt{3}\text{ cm}$
D) $\sqrt{2}\text{ cm}$
E) 1 cm

29. Del gráfico, calcule $\overline{MN}$, si

$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{36}$$

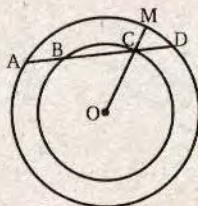


- A) 18 B) 13 C) 12
D) 36 E) 6

30. En la figura, se tienen dos circunferencias concéntricas en O tal que

$$BC = CD = 2\sqrt{2} \text{ cm y } OC = 3 \text{ cm.}$$

Halle CM.



- A) 2 cm B) 3 cm C) $2\sqrt{2}$ cm
D) $2\sqrt{3}$ cm E) $\sqrt{5}$ cm

31. En un trapecio isósceles, su altura mide $3u$ y la suma de las longitudes de las bases es $8u$. Entonces, la longitud (en u) de la diagonal del trapecio es:

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 15

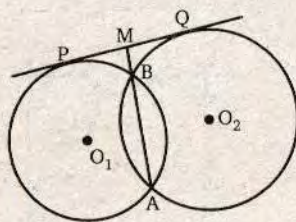
32. En un triángulo rectángulo PQR se traza la bisectriz $\overline{QD}$ y la mediana $\overline{QM}$. Si la circunferencia circunscrita al triángulo DQM interseca a $\overline{PQ}$ y $\overline{QR}$ en A y B, respectivamente, y $PA = 8$ cm. Halle RB.

- A) 7 cm B) 6 cm C) 8 cm
D) 9 cm E) 10 cm

33. En un trapecio ABCD ($\overline{AB} \parallel \overline{CD}$), las bases miden $AB = 6u$ y $CD = 20u$, y los lados no paralelos miden $AD = 13u$ y $BC = 15u$. Entonces la longitud (en u) de la altura del trapecio es:

- A) 9 B) 10 C) 12
D) 15 E) 18

34. En la figura, O_1 y O_2 son centros de la circunferencia, P y Q son puntos de tangencia. Si $PQ = 6$ cm y $BM = 1$ cm, halle AB.



- A) 8 cm B) 7 cm
C) 6 cm
D) 5 cm E) 9 cm

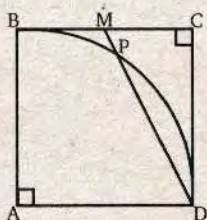
35. En un triángulo acutángulo ABC, considerado como diámetro el lado AC, se traza una semicircunferencia que corta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en E y F, respectivamente. Si $(AB)(AE) + (BC)(FC) = 18$, calcule AC.

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{6}$ E) 4,5

36. En un triángulo acutángulo ABC, se traza una paralela por B al lado $\overline{AC}$, la bisectriz interior del ángulo A corta a dicha paralela en E. Calcule AE si se sabe que $AB = 5$; $BC = 4\sqrt{2}$ y $AC = 7$.

A) $5\sqrt{5}$ B) $6\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{5}$ E) $9\sqrt{3}$

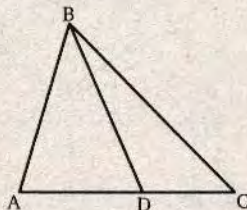
37. En la figura, ABCD es un cuadrado, BAD es un cuadrante, $BM = MC$ y $AB = 4\sqrt{5}$ cm. Halle DP.



A) 5 cm B) 6 cm C) 7 cm
D) 9 cm E) 8 cm

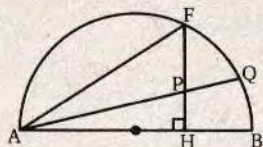
38. En el gráfico, $AB = 5$; $BD = 5$; $BC = 7$ y

$AC = 9$. Calcule $\frac{AD}{DC}$.



A) $\frac{17}{8}$ B) $\frac{19}{7}$ C) $\frac{19}{8}$
D) $\frac{17}{9}$ E) $\frac{18}{7}$

39. En la figura, AB es diámetro, $AF = 6$ cm y $AP = 5$ cm. Halle PQ.

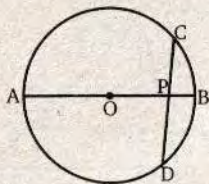


A) $\frac{11}{5}$ cm B) 2 cm C) $\frac{13}{5}$ cm
D) $2\sqrt{3}$ cm E) $2\sqrt{2}$ cm

40. En un triángulo ABC, las medidas de sus lados son tres números enteros consecutivos y la medida del ángulo mayor es el doble de la medida del menor ángulo. Halle el perímetro del triángulo ABC en centímetros.

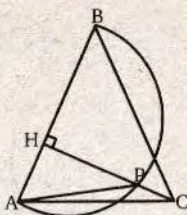
A) 15 cm B) 16 cm C) 14 cm
D) 17 cm E) 18 cm

41. En la figura, O es centro de la circunferencia, $AB=24$ cm, $BP=2$ cm y $m\widehat{AD}=3m\widehat{BC}$. Halle PD.

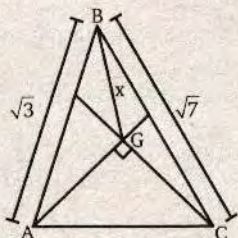


- A) 3 cm B) 3,8 cm C) 4 cm
D) 4,4 cm E) 5 cm
42. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro, $AB=BC$ y $AC=2$ cm. Halle AP.

- A) $\sqrt{3}$ cm
B) $\sqrt{2}$ cm
C) 2 cm
D) $\frac{5}{2}$ cm
E) $2\sqrt{2}$ cm

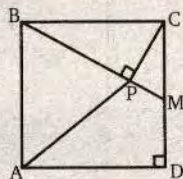


43. Si G es baricentro de la región triangular ABC, calcule x.



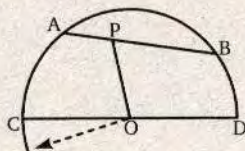
- A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{3}$

44. En la figura, ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 2 cm, $CM=MD$. Halle AP.



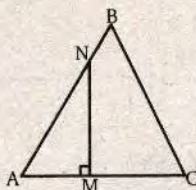
- A) 2 cm B) $2\sqrt{2}$ cm C) $2\sqrt{3}$ cm
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

45. En el gráfico $AP=1$ cm, $PB=7$ m y $OC=OD=4$ m. Calcule OP.

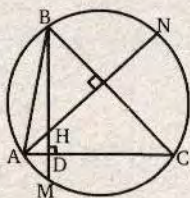


- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

46. En la figura, $AB=15$ cm, $BC=13$ cm y $AM=MC=7$ cm. Halle MN.

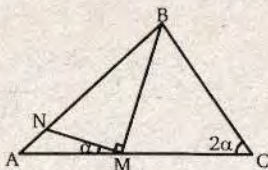


- A) 8 cm B) 10 cm C) 9 cm
D) $\frac{29}{3}$ cm E) $\frac{28}{3}$ cm



- A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

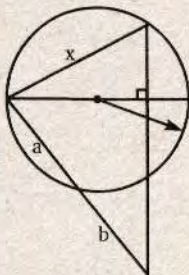
48. En la figura, $AM = MC$ y numéricamente $AB^2 - BC^2 = 8$. Hallar BM en centímetros.



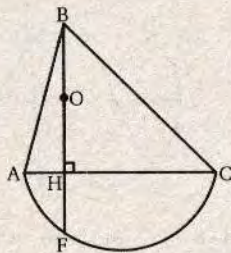
- A) $\sqrt{3}$ cm B) 2 cm C) $2\sqrt{2}$ cm
D) $2\sqrt{3}$ cm E) 3 cm

49. Del gráfico, calcule x .

- A) $\sqrt{ab}$
B) $\frac{a+b}{2}$
C) $\sqrt{(a+b)a}$
D) $2\sqrt{ab}$
E) $\sqrt{(a+b)b}$

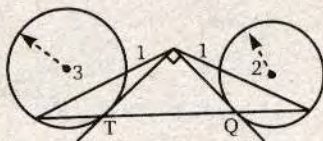


50. En la figura O es ortocentro del triángulo ABC y $\overline{AC}$ es diámetro de la semicircunferencia. Si $OB=5\text{m}$ y $HO=4\text{m}$, hallar HE.



- A) 6 m B) 7 m C) 5 m
D) 8 m E) 9 m

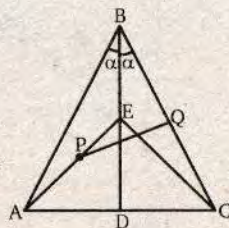
51. Si T y Q son puntos de tangencia.
Calcule TQ.



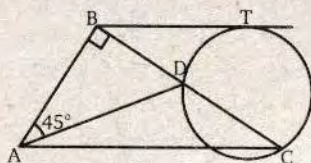
- A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$
D) $2\sqrt{2}$ E) 2

52. En la figura, $AP=PE$, $BQ=QC$ y $AD=DC$.
Si $BE=2\text{ m}$ y $AC=8\sqrt{3}\text{ m}$, hallar PQ .

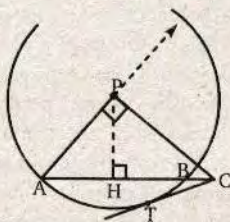
- Si $BE = 2\text{m}$ y $AC = 8\sqrt{3}\text{ m}$, hallar PQ .



53. Según el gráfico, $BT=12$ y $AC=16$.
¿Cuánto dista B de AC? (T es punto de tangencia)



- A) 6 B) 8 C) 7,5
D) 9 E) 10
54. En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CE}$. Si $AB=5$ m, $BC=6$ m y $AC=7$ m. Hallar EH.
- A) $\frac{7}{5}$ m B) $\frac{9}{5}$ m C) $\frac{10}{7}$ m
D) $\frac{10}{3}$ m E) 2m
55. Del gráfico, T es punto de tangencia, además, $CT=AP$. Calcule $\frac{AB}{BC}$.

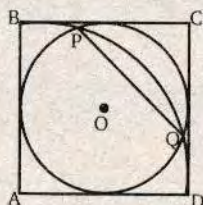


- A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) 1 E) 3

56. En un triángulo ABC, las medianas $\overline{BM}$ y $\overline{CE}$ son perpendiculares. Si $AB = \sqrt{2}$ m, hallar AC.

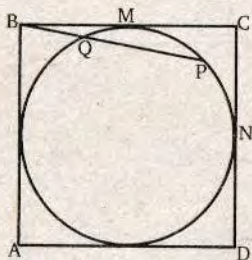
- A) $\sqrt{2}$ m B) $\sqrt{5}$ m C) $\sqrt{3}$ m
D) $\sqrt{7}$ m E) $\sqrt{8}$ m

57. En la figura, la circunferencia de centro O está inscrita en el cuadrado ABCD. Si BAD es un cuadrante y $AB=4$ m, hallar la distancia de O a $\overline{PQ}$



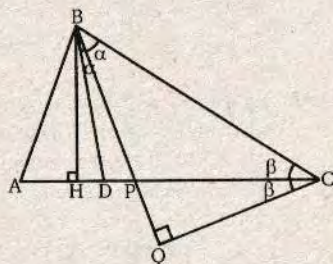
- A) $\sqrt{2}$ m B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ m
D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ m E) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ m

58. En el gráfico ABCD es un cuadrante, $CD=6$ u y $m\widehat{MP} = m\widehat{PN}$. Calcule BQ.

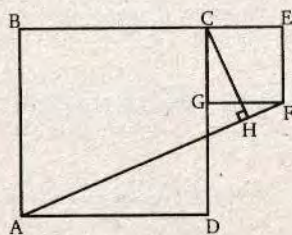


- A) 3 B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $\sqrt{5}$ E) 2,5

59. En el gráfico, ABC es un triángulo rectángulo recto en B. Si $(AP)(AC) = 50 \text{ cm}^2$, calcule AB.

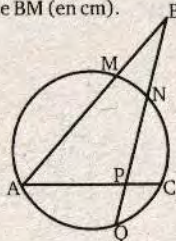


- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7
60. En el gráfico ABCD y GCEF son cuadrados. Si $AB = 3\sqrt{2}$ y $CE = \sqrt{2}$, calcule CH.



- A) $3\sqrt{10}/5$ B) $2\sqrt{10}/7$
C) $\sqrt{5}/10$
D) $2\sqrt{10}/5$ E) $3\sqrt{10}/10$

61. En la figura si $m\widehat{MN} = m\widehat{NC}$, $QP = 2PC$, $AP = 4 \text{ cm}$ y $PQ + BN = 6 \text{ cm}$. Halle BM (en cm).



- A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

62. Desde un punto A exterior a una circunferencia C de centro O, se trazan la tangente AB y el segmento OA intercepta a C en Q; P pertenece a AB tal que $m\angle BQP = 90^\circ$. Si $AP = 4u$ y $PB = 5u$, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia es

- A) 2,5 B) 3,0 C) 3,5
D) 3,75 E) 3,85

63. Desde un punto A exterior a una circunferencia C_1 de centro O, se trazan la tangente $\overline{AP}$ y el segmento AO. Por el punto A se traza, el rayo AX perpendicular a $\overline{AO}$ que intercepta en el punto F; a la recta tangente trazada a la circunferencia por el punto M que pertenece a la circunferencia tales que las tangentes no se interceptan. Si $AP = b$ y $FM = a$, entonces la longitud de $\overline{AF}$ es

- A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2 - b^2}$ C) $\sqrt{b^2 - a^2}$
D) $\sqrt{a^2 + b^2}$ E) $\frac{2ab}{a+b}$

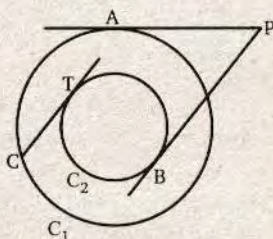
64. En un cuadrante AOB su radio mide 10u. Con centro en el punto A se dibuja una semicircunferencia de radio 6u, la semicircunferencia intercepta al arco AB en el punto P. Si $\overline{PM} \perp \overline{OB}$ ($M \in \overline{OB}$), entonces la longitud (en u) de $\overline{PM}$ es:

A) 8,0 B) 8,2 C) 8,5
D) 8,6 E) 9,0

65. En un triángulo ABC recto en B, la hipotenusa mide 25u y la suma de las longitudes de la altura relativa a la hipotenusa y de los catetos es 47u. Entonces, la longitud (en u) de la altura relativa a la hipotenusa es:

A) 10 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

66. En la figura: C_1 y C_2 son concéntricas; A, B y T son puntos de tangencia. Calcule CT si $AP = 1$ cm y $PB = 3$ cm.



A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

67. En una semicircunferencia de diámetro AB y centro O, se inscribe un triángulo rectángulo cuyo cateto $\overline{CB}$ mide 8cm. Se traza la tangente BP tal que $\overline{OP} \parallel \overline{AC}$. Si $OB = 10$ cm, halle BP.

A) $4\sqrt{21}$ B) $\frac{20\sqrt{21}}{21}$ C) $\frac{10\sqrt{21}}{21}$
D) $2\sqrt{21}$ E) $\frac{30\sqrt{21}}{21}$

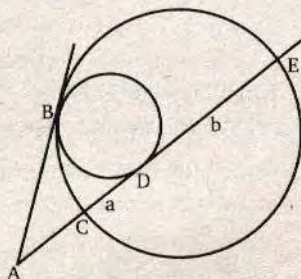
68. En un trapecio rectángulo ABCD (recto en A y D) sus diagonales se intersecan perpendiculares en E. Si $AD = 3$ m y $AE = 1$ m. Determine (en m) la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{DC}$.

A) $\frac{21\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ C) 9
D) 10 E) $11\sqrt{2}$

69. En la siguiente figura $ED = b$, $CD = a$ y

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{5}. \text{ Halle la longitud (en u)}$$

de la tangente $\overline{AB}$.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

70. Se tiene dos circunferencias secantes en D y C. Por C se traza una recta L secante a una de las circunferencias en A y a la otra B, de A y B se trazan las tangentes L_1 y L_2 a las circunferencias dadas en E y F respectivamente. Si $AE=a$ y $BF=b$, entonces AB es:

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2 + b^2}$ C) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$
 D) $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ E) $\frac{a+b}{2}$

71. Si MNPQ es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. $MN=a$, $NP=b$, $PQ=c$ y $MQ=D$, entonces MP mide:

A) $\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ac+bd}}$
 B) $\sqrt{\frac{(bc+ad)(ac+bd)}{ab+cd}}$
 C) $\sqrt{\frac{(cd+ab)(ac+bd)}{bc+ad}}$
 D) $\sqrt{\frac{ab+cd}{ac+bd}}$
 E) $\sqrt{\frac{ac+bd}{ab+cd}}$

72. En un triángulo KLM, I y O son el incentro y circuncentro respectivamente. Si $(KL)(LM)=30 \text{ m}^2$, y $m\angle OIL=90^\circ$, entonces IL es cm.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}$
 D) $\sqrt{8}$ E) $\sqrt{10}$

73. En un triángulo ABC, de incentro I, $m\angle ABC=60^\circ$ y el circuncentro del triángulo AIC es O. Si $AB+BC=\ell$, hallar OB.

A) ℓ B) $\frac{\ell}{2}$ C) $\ell\sqrt{3}$
 D) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$

74. En un triángulo escaleno ABC se ubican exteriormente los puntos M y N relativos a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tal que $AB \cong BM$, $BC \cong BN$, $m\angle MBA = m\angle NBC = 90^\circ$ y el punto de intersección entre $\overline{MC}$ y $\overline{AN}$ es Q. Si $BQ = \sqrt{2} \text{ dm}$ y $AQ = 4 \text{ dm}$ entonces MQ (en dm) es

A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) $3\sqrt{2}$
 D) 6 E) $4\sqrt{2}$

75. En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{BQ}$ que intersectan en O. Si $OB \cdot OQ = 40 \text{ u}^2$ y el circunradio mide $12u$, calcule la longitud (en u) del segmento que une el circuncentro y el ortocentro.

A) 6 B) 7 C) 8
 D) 10 E) 11

76. En un triángulo ABC se cumple que $AB=6 \text{ u}$, $BC=7 \text{ u}$ y $AC=8 \text{ u}$. Si F es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado AC. Halle BF (en u)

A) $\sqrt{415}$ B) $\frac{\sqrt{415}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{415}}{4}$
 D) $\frac{\sqrt{415}}{8}$ E) $\frac{\sqrt{415}}{16}$

77. En un triángulo MNP. Si $MN=16$ u, $NP=30$ u, $MP=26$ u, entonces $m\angle MNP$ es

A) 15 B) 30 C) 45
D) 60 E) 75

78. En un paralelogramo ABCD las diagonales forman un ángulo agudo cuya medida es 45. Si $AB=a$ y $BC=b$ ($a>b$), entonces ¿cuál es la longitud de la altura entre los lados?

A) $\frac{a^2+b^2}{2b}$ B) $\frac{a^2+b^2}{2a}$ C) $\frac{a^2-b^2}{2a}$
D) $\frac{a^2-b^2}{a\sqrt{2}}$ E) $\frac{a^2+b^2}{a\sqrt{3}}$

79. En el rombo ABCD, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $MA^2+MD^2=10\ell^2$. Calcule la longitud de los lados del rombo.

A) 2ℓ B) $\frac{3\ell}{2}$ C) ℓ
D) $\frac{4\ell}{3}$ E) $\frac{5\ell}{2}$

80. En un triángulo ABC, se ubica un punto P exterior, tal que AP es bisectriz del ángulo A, $\overline{AP} \perp \overline{PB}$. Si $BC=5$ u y $PB^2+PC^2=20u^2$. Halle $AB-AC$.

A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{15}$ E) $\sqrt{17}$

81. En un cuadrante AOB su radio mide 10u. Con centro en el punto A se dibuja una semicircunferencia de radio 6u, la semicircunferencia intercepta al arco AB en el punto P. Si $\overline{PM} \perp \overline{OB}$ ($M \in \overline{OB}$), entonces la longitud (en u) de $\overline{PM}$ es.

A) 8 B) 8,2 C) 8,5
D) 8,6 E) 9

82. En un triángulo ABC recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y la ceviana Ad tales que $\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \overline{HC}$. Si $AD=\ell$, entonces la longitud de $\overline{BC}$ es:

A) ℓ B) $\frac{2\ell}{3}$ C) $\ell\sqrt{2}$
D) $2\ell\sqrt{2}$ E) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$

83. Una circunferencia es tangente a dos lados adyacentes de un cuadrado y divide a cada uno de los otros dos lados en dos segmentos cuyas longitudes son 2u y 23u. Entonces, la longitud (en u) del radio de la circunferencia es:

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

84. Desde un punto A exterior a una circunferencia C_1 de centro O, se trazan la tangente $\overline{AP}$ y el segmento AO. Por el punto A se traza el rayo AX perpendicular a $\overline{AO}$ que intercepta en el punto E, a la recta tangente traza da a la circunferencia por el punto M que pertenece a la circunferencia tales que la tangentes no se interceptan. Si $AP=b$ y $FM=a$, entonces la longitud de $\overline{AF}$ es:

A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{a^2 - b^2}$ C) $\sqrt{b^2 - a^2}$
 D) $\sqrt{a^2 + b^2}$ E) $\frac{2ab}{a+b}$

85. Desde un punto A exterior a una circunferencia C de centro O, se trazan la tangente $\overline{AB}$ y el segmento OA. El segmento OA intercepta a C en Q, y P pertenece a $\overline{AB}$ tales que $m\angle BQP = 90^\circ$. Si $AP=4$ u y $PB=5$ u, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia es:

A) 2,5 B) 3 C) 3,5
 D) 3,75 E) 3,85

86. En un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$), se traza la altura $\overline{BH}$ y la ceviana $\overline{BD}$ del triángulo ABH. Se ubica el punto M en $\overline{AB}$ tales que $\overline{DM} \parallel \overline{BC}$ y $m\angle DBC = 90^\circ$.

Si $AB=4AM$ y $BH=8u$, entonces la longitud (en u) de $\overline{MD}$ es:

A) 1 B) 2 C) 2,5
 D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

87. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, se inscribe el triángulo ABC. En $\overline{AB}$ se ubica el punto D y se traza el rayo DX perpendicular a $\overline{AB}$, que intercepta a la cuerda $\overline{BC}$ en el punto E a la semicircunferencia en F y a la prolongación de $\overline{AC}$ en el punto G. Si $EG=a$ y $DE=b$, entonces la longitudes de $\overline{FD}$ es:

A) $\sqrt{(a+b)a}$ B) $\sqrt{(a+b)b}$
 C) $\sqrt{ab}$
 D) $2\sqrt{ab}$ E) $\frac{2ab}{a+b}$

88. En un triángulo ABC recto en B, se trazan la bisectriz interior $\overline{AD}$ y la altura $\overline{BH}$ que se interceptan en el punto E. Si $AE=7u$ y $ED=2u$, entonces la longitud (en u) de $\overline{BE}$ es:

A) 1 B) 2 C) 3
 D) 3,5 E) 4

89. En un triángulo ABC recto en B, la circunferencia exinscrita relativa al lado $\overline{BC}$ es tangente a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos P y Q respectivamente. Las prolongaciones de $\overline{PQ}$ e $\overline{IC}$ se interceptan en E. Si I es el incentro del triángulo ABC, r es la longitud del radio de la circunferencia inscrita y r_a es la longitud del radio de la circunferencia exinscrita relativa al lado BC, entonces la longitud de $\overline{EC}$ es:

A) $\frac{r(r+r_a)}{\sqrt{r^2+r_a^2}}$ B) $\frac{r(r_a-r)}{\sqrt{r^2+r_a^2}}$
 C) $\frac{2r(r_a+r)}{\sqrt{r^2+r_a^2}}$
 D) $\frac{2\pi r_a}{r+r_a}$ E) $\sqrt{\pi a}$

90. En un triángulo ABC recto en B, la circunferencia exinscrita relativa a la hipotenusa de centro E es tangente en P y Q a las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$. Además $\overline{PQ}$ intercepta a $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$ en M y N respectivamente. Si $PM = a$, $MN = b$ y $NQ = c$, entonces ¿cuál es la relación correcta?

A) $b = \sqrt{ac}$ B) $a^2 + c^2 = b^2$
 C) $a^2 + b^2 = c^2$
 D) $b^2 + c^2 = a^2$ E) $a = \sqrt{bc}$

91. En un cuadrante cuyo radio mide R, en su interior y considerando como diámetro uno de sus radios se dibuja una semicircunferencia. Entonces, la longitud del radio de la circunferencia tangente al otro radio, tangente a la semicircunferencia y tangente al arco del cuadrante es:

A) $\frac{R}{2}$ B) $\frac{R}{3}$ C) $\frac{R}{4}$
 D) $\frac{R}{5}$ E) $\frac{R}{6}$

92. El radio de un cuadrante mide $9u$, considerando como diámetro sus radios y en su interior se dibujan dos semicircunferencias. Entonces, la longitud (en u) del radio de la circunferencia tangente a las dos semicircunferencias y a uno de los radios del cuadrante es:

A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

93. En un triángulo isósceles ABC recto en B, se trazan las cevianas $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ tales que N está en $\overline{MC}$.

Si $(AM)^2 + (CN)^2 = (MN)^2$, entonces $m\angle MBN$ es:

A) 30 B) 36 C) 45
 D) 60 E) 75

94. En un cuadrilátero ABCD, se tiene que $(AB)^2 + (CD)^2 = 120$; $(BC)^2 + (AD)^2 = 140$ y $AC = 5$. Se trazan las perpendiculares BM y DN hacia $\overline{AC}$ (M y N en $\overline{AC}$). Calcule MN.

A) 1 B) 1,5 C) $\sqrt{2}$
 D) 2 E) $\sqrt{3}$

95. Los catetos de un triángulo miden $6u$ y $8u$. Entonces, la distancia (en u) del incentro al circuncentro del triángulo es:

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{6}$
 D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{2}$

96. En un trapecio escaleno ABCD ($\overline{BC} // \overline{AD}$), se cumple que $(AB)^2 + (CD)^2 = 16$ y $(BC)(AD) = 10$. Calcule $\sqrt{(AC)^2 + (BD)^2}$

A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

97. Un triángulo equilátero ABC, está circunscrito a una circunferencia y P es un punto cualquiera de la circunferencia diferente de los puntos de tangencia. Si $AB = \ell$, entonces la expresión

$$(AP)^2 + (BP)^2 + (PC)^2 \text{ es:}$$

- A) $\frac{\ell^2}{4}$ B) $\frac{2\ell^2}{5}$ C) $\frac{4\ell^2}{5}$
D) $\frac{5\ell^2}{4}$ E) $\frac{4\ell^2}{3}$

98. En un triángulo ($\overline{AB} \cong \overline{AC}$) considerando como diámetro el lado $\overline{AB}$ se dibuja una semicircunferencia que intersepta a la altura $\overline{CH}$ en el punto D.

Si $BC = 4\sqrt{2}u$, entonces la longitud de $\overline{BD}$ es:

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 3,5 E) 4

99. En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 60^\circ$, el punto I es el incentro y el punto O es el circuncentro del triángulo AIC.

Si $AB + BC = \ell$, entonces la longitud de $\overline{OB}$ es:

- A) $\frac{\ell}{2}$ B) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{2\ell}{3}$ E) $\frac{4\ell}{5}$

100. Se tienen dos circunferencias tangentes interiores, en el punto B. La circunferencia menor pasa por el centro de la circunferencia mayor, y la cuerda

$\overline{AC}$ de la circunferencia menor en el punto M. Si $AM = 16u$ y $MC = 4u$, entonces la longitud (en u) de la cuerda $\overline{BM}$ es:

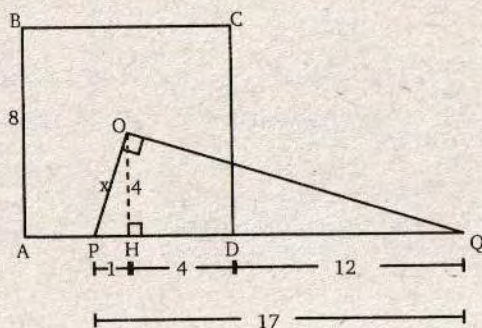
- A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

$\triangle BOE$ (Teorema de Pitágoras)

$$x^2 = 2^2 + 4^2$$

$$x^2 = 20$$

$$\therefore x = 2\sqrt{5}$$

Rpta.: C**Resolución 3:**

Piden :

$$OP = x$$

Trazamos :

$$\overline{OH} \ (\overline{OH} \perp \overline{AD})$$

Luego :

$$OH = 4 \text{ ("O" centro del cuadrado)}$$

$$HD = 4$$

También :

$$4^2 = (PH)(4 + 12) \quad (\text{Teorema})$$

$$\rightarrow PH = 1$$

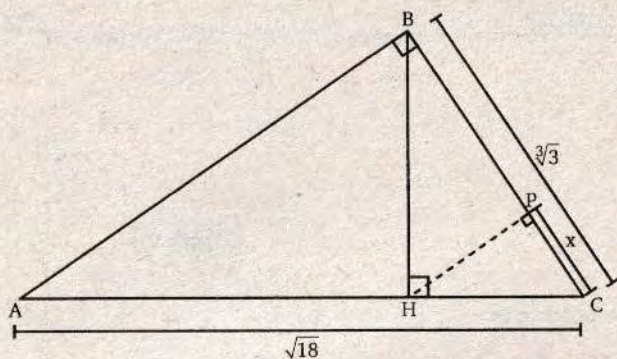
Finalmente:

$$x^2 = 1(17) \quad (\text{Teorema})$$

$$\therefore x = \sqrt{17}$$

Rpta.: D

Resolución 4:



Piden :

$$PC = x$$

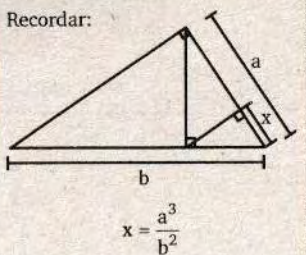
Teorema :

$$PC = \frac{(BC)^3}{(AC)^2}$$

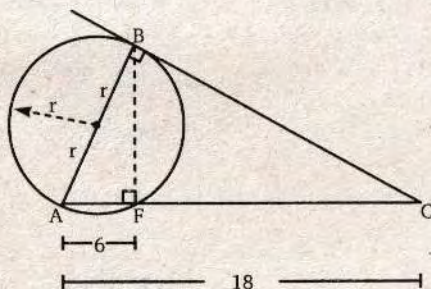
$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt[3]{3}^3}{\sqrt{18}^2}$$

$$\therefore x = \frac{1}{6}$$

Recordar:

**Rpta.: C**

Resolución 5:



Piden :

$$r = ?$$

Trazamos

$$\overline{BF} \rightarrow m\angle BFA = 90^\circ$$

(Teorema)

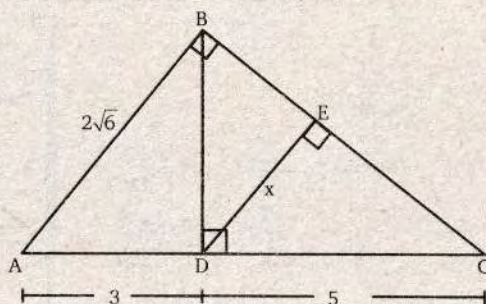
Luego :

$$\triangle ABC :$$

$$(2r)^2 = 6 \times 18$$

(Teorema)

$$\therefore r = 3\sqrt{3}$$

Rpta.: C**Resolución 6:**

Piden :

$$x = ?$$

 $\triangle ABC :$

$$AB^2 = 3(3 + 5) \text{ (Teorema)}$$

$$AB = 2\sqrt{6}$$

Luego :

$$\triangle CED \sim \triangle CBA$$

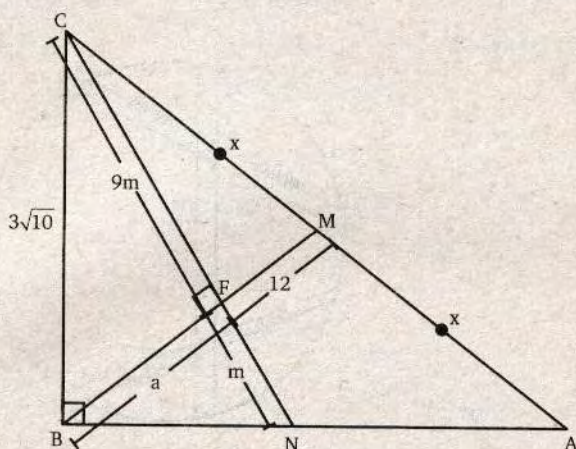
$$\frac{x}{2\sqrt{6}} = \frac{5}{8}$$

$$x = \frac{5 \times 2\sqrt{6}}{8}$$

$$\therefore x = \frac{5}{4}\sqrt{6}$$

Rpta.: D

Resolución 7:



Piden :

$$AC = 2x$$

 $\triangle ABC$:

$$BM = MC = MA = x = a + 12$$

 $\triangle CBN$:

$$(3\sqrt{10})^2 = (10m)(9m)$$

$$90 = 90 m^2$$

$$\Rightarrow m = 1$$

Ademas :

$$a^2 = (9m)(m)$$

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

Luego :

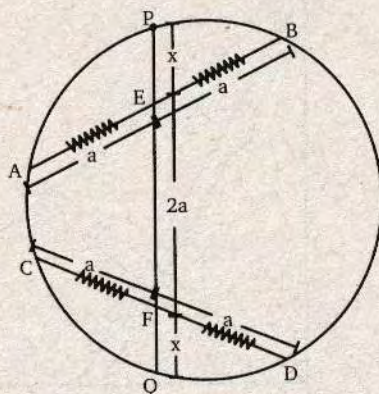
$$x = a + 12$$

$$x = 15$$

$$\therefore AC = 30$$

Rpta.: B

Resolución 8:



Piden

$$EP = x$$

Teorema de las cuerdas:

$$x(x + 2a) = a^2$$

$$x^2 + 2ax = a^2$$

$$(x + a)^2 - a^2 = a^2$$

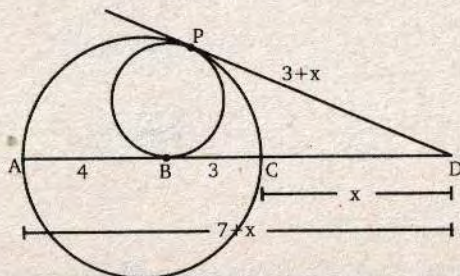
$$(x + a)^2 = 2a^2$$

$$x + a = \sqrt{2} a$$

$$\therefore x = (\sqrt{2} - 1)a$$

Rpta.: B

Resolución 9:



Piden : $CD = x$

Se observa : $PD = BD$ (Teorema)

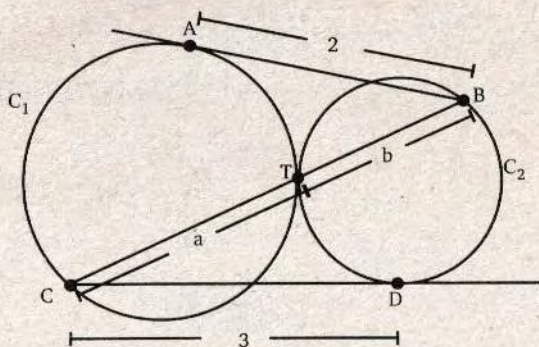
Luego : $(3+x)^2 = x(7+x)$ (Teorema de la tangente)

$$9 + x^2 + 6x = 7x + x^2$$

$$\therefore x = 9$$

Rpta.: D

Resolución 10:



Piden : $BC = a + b$

Teorema de la tangente:

En C_1 : $2^2 = b(a+b)$... (I)

En C_2 : $3^2 = a(a+b)$... (II)

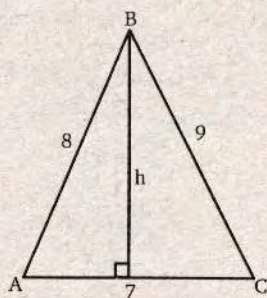
(I) + (II) : $2^2 + 3^2 = (a+b)(a+b)$

$$13 = (a+b)^2$$

$$\therefore a+b = \sqrt{13}$$

Rpta.: E

Resolución 11:



$$\text{Piden: } h = ? \quad p = \frac{8+9+7}{2} \rightarrow p = 12$$

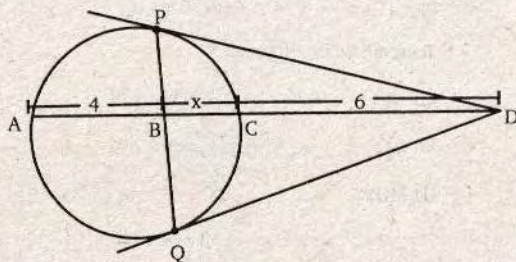
$$h = \frac{2}{7} \sqrt{12(12-8)(12-9)(12-7)} \quad (\text{T. de Herón})$$

$$h = \frac{2}{7} \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$\therefore h = \frac{24\sqrt{5}}{7}$$

Rpta.: C

Resolución 12:



Piden

 $BC = x$

Teorema :

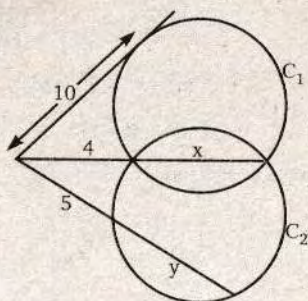
A; B ; C y D forman una cuaterna

Armónica:

$$\frac{4}{x} = \frac{x+10}{6}$$

$$24 = x(x+10)$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: A**Resolución 13:**Piden : $x + y = ?$ Para C_1 :

$$10^2 = 4(4 + x) \quad (\text{Teorema de la tangente})$$

$$\rightarrow x = 21$$

Para C_2 :

$$4(4 + x) = 5(5 + y) \quad (\text{Teorema de las secantes})$$

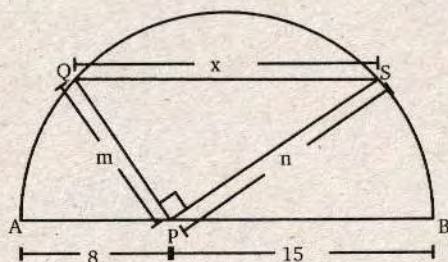
$$100 = 5(5 + y)$$

$$\rightarrow y = 15$$

$$\therefore x + y = 36$$

Rpta.: C

Resolución 14:

Dato: $\overline{QS} \parallel \overline{AB}$ Piden: x

Teorema :

$$m^2 + n^2 = (AP)^2 + (PB)^2$$

$$m^2 + n^2 = 8^2 + (15)^2$$

$$m^2 + n^2 = 17^2$$

 ΔPQS (Teorema de Pitágoras):

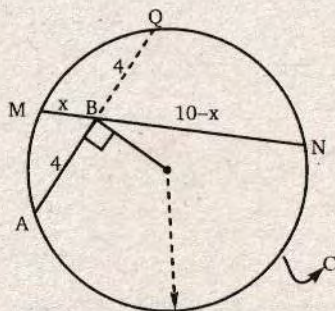
$$x^2 = m^2 + n^2$$

$$x^2 = 17^2$$

$$\therefore x = 17$$

Rpta.: B

Resolución 15:



Piden : $MB = x$

Del dato : $BN = 10 - x$

Prolongamos $\overline{AB}$ hasta Q ($Q \in C$)

Luego : $AB = BQ = 4$ (Teorema)

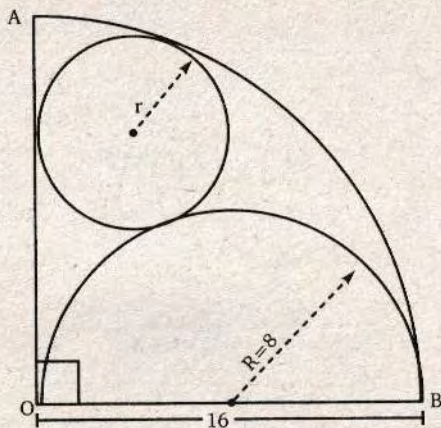
Finalmente:

$$4 \times 4 = x(10 - x) \text{ (Teorema de las cuerdas)}$$

$$\rightarrow x = 2$$

Rpta.: B

Resolución 16: De acuerdo al gráfico $OB=16$; calcule el valor de r .



Piden: r

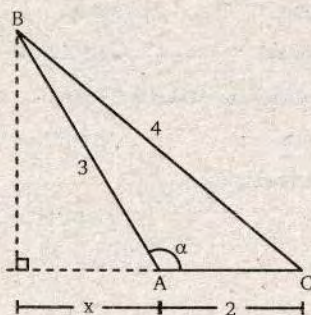
Teorema $R = 2r$

$$\Rightarrow 8 = 2r$$

$$\therefore r = 4$$

Rpta.: A

Resolución 17:



Piden : $x = ?$

Se observa : $\alpha > 90^\circ$

Dado que:

$$4^2 > 3^2 + 2^2 \text{ (Naturaleza del triángulo)}$$

Luego:

$$4^2 = 3^2 + 2^2 + 2(x)2 \quad (\text{T de Euclides})$$

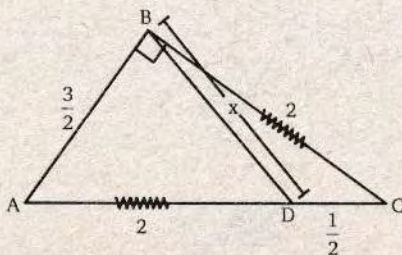
$$16 - 13 = 4x$$

$$3 = 4x$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}$$

Rpta.: B

Resolución 18:

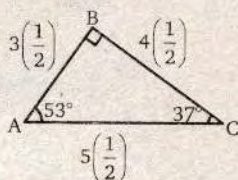


Piden :

$$BD = x$$

$\triangle ABD$ (notable de 37° y 53°):

$$\Rightarrow AB = \frac{3}{2}$$



Teorema de Stewart:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) + (2)^2 (2) = x^2 \left(\frac{5}{2}\right) + (2) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right)$$

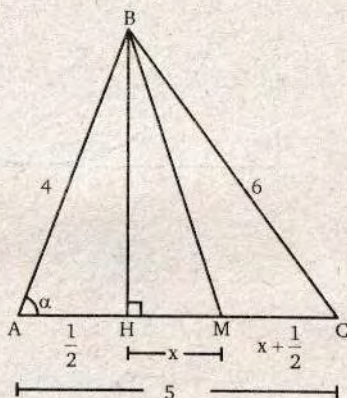
$$9 + 64 = 20x^2 + 20$$

$$\frac{53}{20} = x^2$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{265}}{10}$$

Rpta.: E

Resolución 19:



Piden :

$$x = ?$$

Del gráfico :

$$\alpha < 90^\circ$$

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2(5)(AH) \quad (\text{Teorema de Euclides})$$

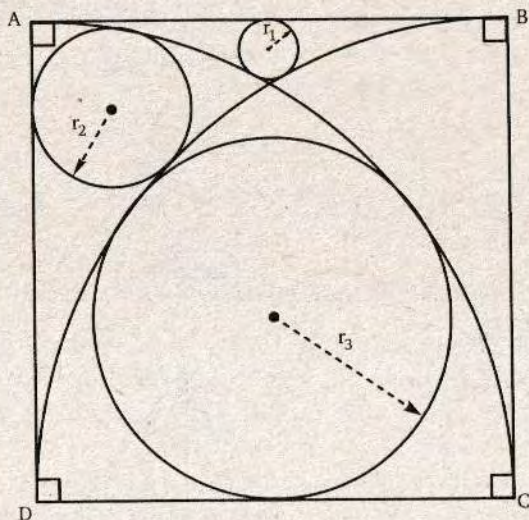
$$10(AH) = 5$$

$$AH = \frac{1}{2}$$

Luego:

$$\frac{1}{2} + x + x + \frac{1}{2} = 5$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: B**Resolución 20:**

Piden :

$$r_1 + r_2$$

Se sabe que

$$\begin{cases} r_1 = \frac{\ell}{16} \\ r_2 = \frac{\ell}{6} \\ r_3 = \frac{3\ell}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3\ell}{8} = 18 \Rightarrow \ell = 48$$

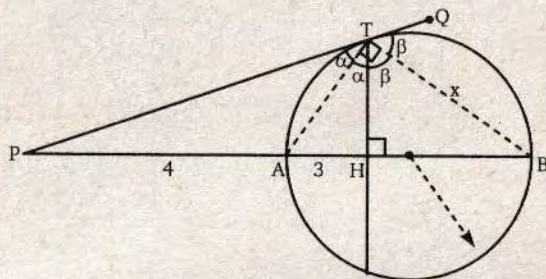
Luego :

$$r_1 + r_2 = \frac{48}{16} + \frac{48}{6}$$

$$\therefore r_1 + r_2 = 11 \text{ cm}$$

Rpta.: C

Resolución 21:



Piden : $TB = x$

Trazamos $\overline{AT}$, luego: $m\angle PTA = m\angle ATH$ (Teorema)

Tambien : $m\angle HTB = m\angle BTQ$ (Teorema)

Luego: P, A, H y B forman cuaterna armónica

$$\rightarrow 4(\text{HB}) = 3(4 + 3 + \text{HB})$$

HB = 21

Finalmente: Δ ATB:

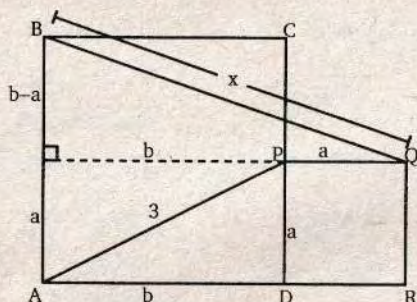
$$x^2 = HB(3 + HB)$$

$$\rightarrow x = \sqrt{21.24}$$

$$\therefore x = 6\sqrt{14}$$

Rpta.: B

Resolución 22:



Piden : $BQ = x$

Sea : $AD = b \wedge PQ = a$

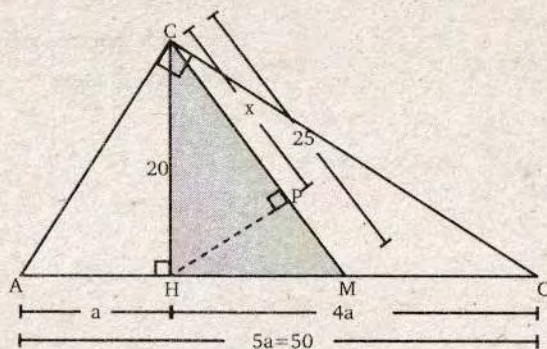
Luego : $\triangle ADP$: $3^2 = a^2 + b^2$ (T. Pitágoras)

$$9 = a^2 + b^2$$

También : $\triangle BNQ$: $x^2 = (b-a)^2 + (b+a)^2$ (T. Pitágoras)

$$x^2 = 2(\underbrace{b^2 + a^2}_9)$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2}$$

Rpta.: D**Resolución 23:**

Piden : $BP = x$

$\triangle ABC$: $20^2 = (a)(4a)$

$$\Rightarrow a = 10$$

Además : $BM = AM = MC = \frac{50}{2}$

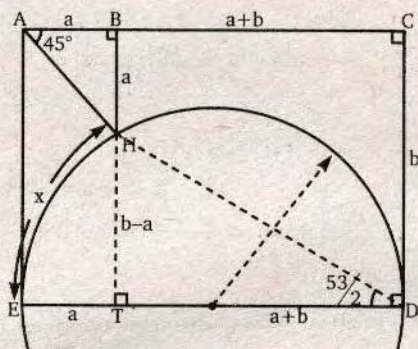
$$BM = 25$$

$\triangle BHM$: $20^2 = (25)(x)$

$$\therefore x = 16 \text{ cm}$$

Rpta.: A

Resolución 24:



Piden : $m\widehat{EH} = x$

Sea : $AB = a \wedge CD = b \rightarrow BC = a + b$ (dato)

Prolongamos : $\overline{BH}$ hasta T ($T \in \overline{ED}$)

Se observa : $HT = b - a$

Luego : $(b - a)^2 = a(a + b)$ (Teorema)

$$\rightarrow b = 3a$$

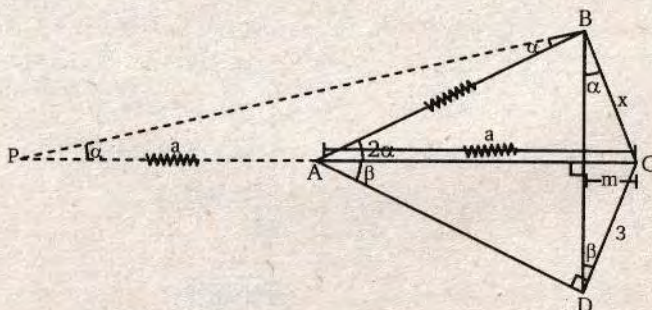
Se observa : $\triangle HTP$: Notable ($53/2$ y $127/2$)

$$\rightarrow m\angle HDT = 53/2$$

$$\therefore x = 53^\circ$$

Rpta.: E

Resolución 25:



Piden

$BC = x$

Formamos el $\triangle PBC$ (recto en B)

$$\Rightarrow AP = AB = AC = a$$

 $\triangle ADC$ (Propiedad):

$$3^2 = am \Rightarrow am = 9 \quad \dots(I)$$

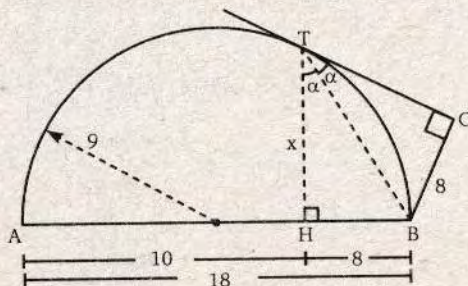
Del mismo modo en el $\triangle PBC$:

$$x^2 = 2a.m \quad \dots(II)$$

(I) en (II):

$$x^2 = 2.9$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

Rpta.: E**Resolución 26:**

Piden :

$TH = x$

Se observa :

$m\angle HTB = m\angle BTC = \alpha \quad (\text{Teorema})$

Luego :

$BC = HB = 8 \quad (\text{Teorema de la bisectriz})$

Además :

$AB = 18 \rightarrow AH = 10$

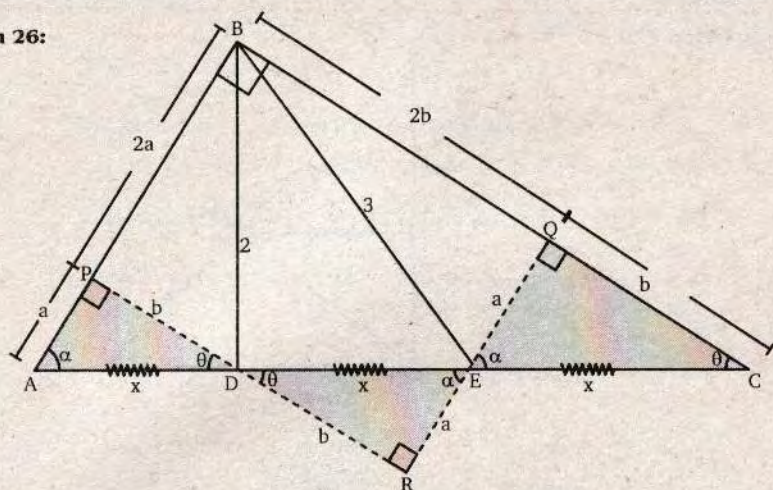
Finalmente :

$x^2 = 10 \times 8$

$$\therefore x = 4\sqrt{5}$$

Rpta.: C

Resolución 26:



Piden : $AD = x$

$$\triangle APD \cong \triangle EQC \cong \triangle ERD$$

$\square PBQR$ es un rectángulo:

$$\Rightarrow \begin{cases} PB = RQ = 2a \\ BQ = PR = 2b \end{cases}$$

Por el teorema de Pitágoras en:

$$\triangle APD : x^2 = a^2 + b^2 \quad \dots(I)$$

$$\triangle PBD : 2^2 = (2a)^2 + b^2 \quad \dots(II)$$

$$\triangle QBE : 3^2 = a^2 + (2ab)^2 \quad \dots(III)$$

$$(II) + (III) : \quad 13 = 5a^2 + 5b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{13}{5} \quad \dots(IV)$$

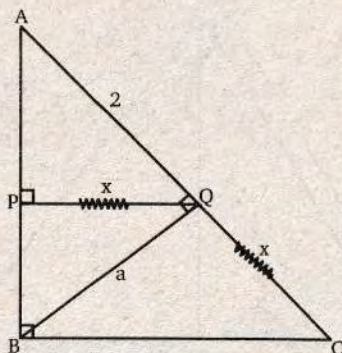
(IV) en (I):

$$x^2 = \frac{13}{5}$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{13}{5}} \text{ cm}$$

Rpta.: D

Resolución 27:



Piden :

$$QC = x$$

 $\triangle ABC$:

$$a^2 = 2x$$

 $\triangle ABQ$:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2x}$$

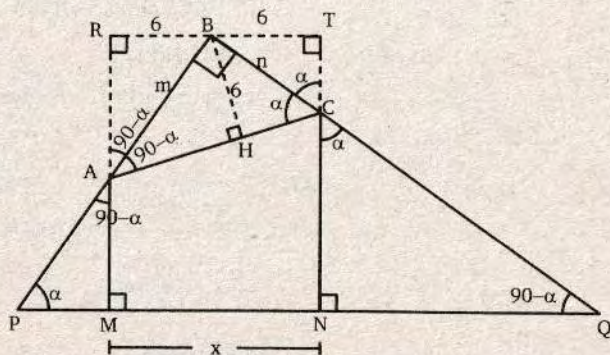
$$4x = x^2 + 2x$$

$$4 = (x+1)^2 - 1$$

$$\therefore x = (\sqrt{5} - 1)\text{cm}$$

Rpta.: A

Resolución 28:



Piden : $MN = x$; del dato : $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6^2}$

Se observa : $m\angle PAM = m\angle BAC = 90^\circ - \alpha$

$m\angle NCQ = m\angle BCA = \alpha$

Luego : $\triangle ABC$: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{BH^2} \rightarrow BH = 6$

También : $RB = BH = 6$ (T. de la bisectriz)

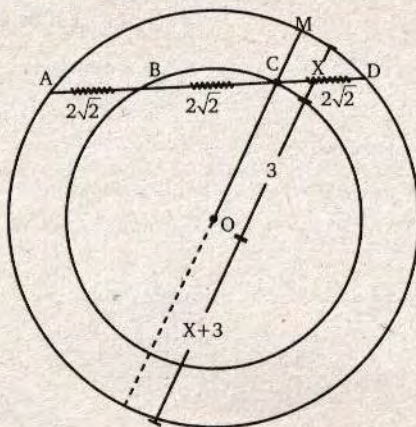
$BT = TC = 6$

$\therefore x = 6 + 6$

$x = 12$

Rpta.: C

Resolución 30:



Piden : $CM = x$

Propiedad : $AB = CD = 2\sqrt{2}$

Teorema de las cuerdas en el punto C:

$$x(x+6) = (2\sqrt{2})(4\sqrt{2})$$

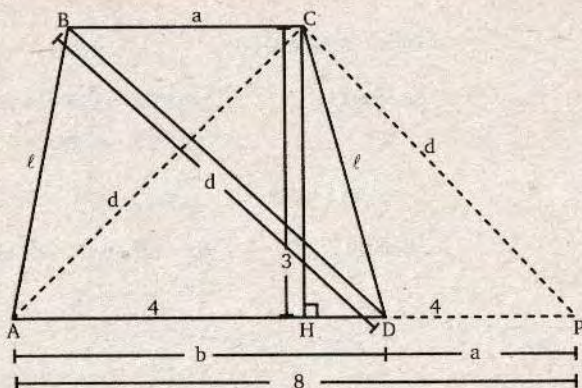
$$x(x+6) = 16 = 2(2+6)$$

$\therefore x = 2$ cm

Rpta.: A

BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 06

Resolución 31:



Dato : $a + b = 8$

Trazamos : $\overline{CP} (\overline{CP} \parallel \overline{BD})$

$\rightarrow \square BCPD$: paralelogramo

$BD = CP = d \wedge BC = DP = a$

Se observa: $\triangle ACP$: Isósceles

$\rightarrow AH = HP = 4$

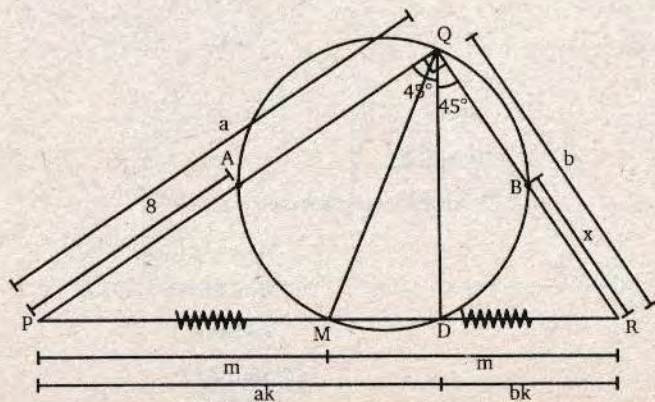
Finalmente:

$\triangle AHC$: $d^2 = 3^2 + 4^2$

$\therefore d = 5$

Rpta.: A

Resolución 32:



Piden : $RB = x$

ΔABC (Teorema de la bisectriz interior)

$$\begin{cases} PQ = a \Rightarrow PP = ak \\ QR = b \Rightarrow RD = bk \end{cases}$$

Por el teorema de las secantes:

En P : $8a = ak \cdot m \quad \dots(I)$

En R : $bx = m \cdot bk \quad \dots(II)$

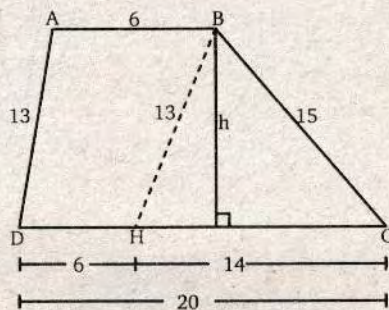
$$(I) \div (II) : \frac{8a}{bx} = \frac{ak \cancel{m}}{m \cancel{b} k}$$

$$\frac{8}{x} = 1$$

$$\therefore x = 8 \text{ cm}$$

Rpta.: C

Resolución 33:



Piden : $h = ?$

Trazamos : $\overline{BH} (\overline{BH} \parallel \overline{AD})$

Luego : $\square ABHD$: paralelogramo

$$\rightarrow AD = BH = 13$$

$$AB = DH = 6$$

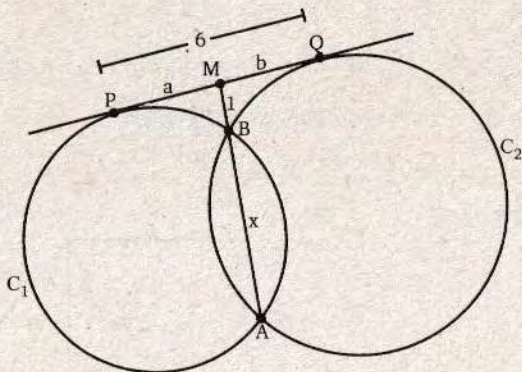
Finalmente:

 ΔHBC : (T. de Herón)

$$P_{\Delta HBC} = \frac{13+15+14}{2} = 21$$

$$h = \frac{2}{14} \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8}$$

$$\therefore h = 12$$

Rpta.: C**Resolución 34:**

Teorema de la tangente

En C_1 y C_2 respectivamente (punto M)

$$(x+1)(1) = a^2 = b^2 \Rightarrow a = b = 3$$

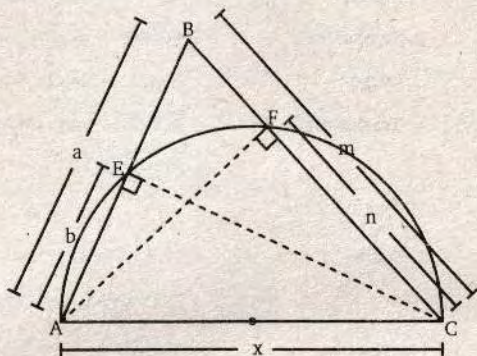
Luego:

$$x+1 = 3^2$$

$$\therefore x = 8 \text{ cm}$$

Rpta.: A

Resolución 35:



Piden : $AC = x$; del dato : $ab + mn = 18$

Trazamos: $\overline{CE}$ y $\overline{AF}$

Luego:

$$\triangle ABC : m^2 = x^2 + a^2 - 2ab \quad (\text{T. Euclides})$$

$$\triangle ABC : a^2 = x^2 + m^2 - 2mn \quad (\text{T. Euclides})$$

$$\underline{a^2 + m^2 = 2x^2 + a^2 + m^2 - 2(ab + mn)}$$

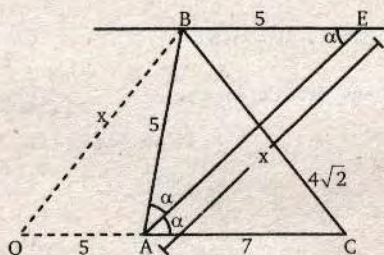
$$2(ab + mn) = 2x^2$$

$$18 = x^2$$

$$\therefore x = 3\sqrt{2}$$

Rpta.: B

Resolución 36:



Piden : $AE = x$

Se observa : $m\angle BEA = m\angle CAE = \alpha$ (α_s alternos internos)

Luego : $\triangle ABE$: Isósceles ($AB = BE = 5$)

Trazamos : $\overline{BQ} (\overline{BQ} \parallel \overline{EA}) \rightarrow BEAQ$: paralelogramo

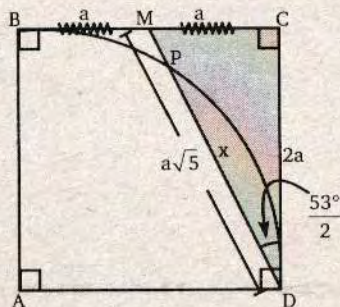
$AB = x \wedge QA = 5$

Finalmente:

$$\begin{aligned}\triangle QBC : & \quad x^2 \cdot 7 + (4\sqrt{2})^2 \times 5 = 5^2 \times (5+7) + 5 \times 7 \times (5+7) \\ & \quad 7 \cdot x^2 + 160 = 25 \times 12 + 35 \times 12 \\ & \quad x^2 = 80 \\ \therefore x &= 4\sqrt{5}\end{aligned}$$

Rpta.: D

Resolución 37:



Piden $DP = x$

$\triangle DCM$ (Notable de $\frac{53^\circ}{2}$)

Teorema de la tangente en M:

$$\begin{aligned}x^2 &= a\sqrt{5}(a\sqrt{5} - x) \\ a &= 5a - \sqrt{5}x \\ x &= \frac{4a}{\sqrt{5}} \quad \dots(I)\end{aligned}$$

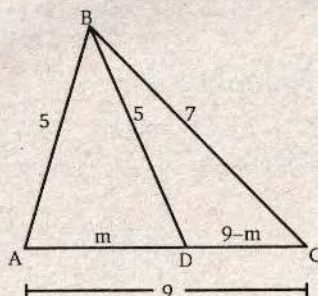
En el problema $AB = 2a = 4\sqrt{5} \Rightarrow 4a = 8\sqrt{5}$

$$\Rightarrow x = \frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore x = 8 \text{ cm}$$

Rpta.: E

Resolución 38:



Piden :

$$\frac{AD}{DC} = \frac{m}{9-m} = ?$$

ΔABC :

$$5^2(9-m) + 7^2 \times m = 5^2 \times 9 + m(9-m) \quad (\text{T. Steward})$$

$$m = \frac{57}{9}$$

$$\rightarrow AD = \frac{57}{9}$$

$$DC = 9 - \frac{57}{9}$$

$$DC = \frac{24}{9}$$

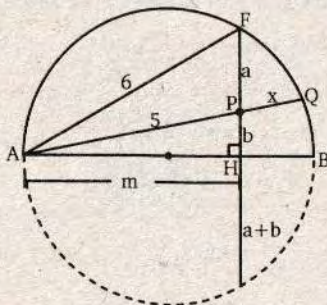
En lo que piden:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{\frac{57}{9}}{\frac{24}{9}}$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{19}{8}$$

Rpta.: C

Resolución 39:



Piden $PQ = x$

Teorema de las cuerdas en P:

$$5x = a(a + 2b) \quad \dots(I)$$

Teorema de Pitágoras: $\triangle AFH : 6^2 = (a + b)^2 + m^2 \quad \dots(II)$

$$\triangle APH : 5^2 = b^2 + m^2 \quad \dots(III)$$

(II) - (III): $11 = (a + b)^2 - b^2$

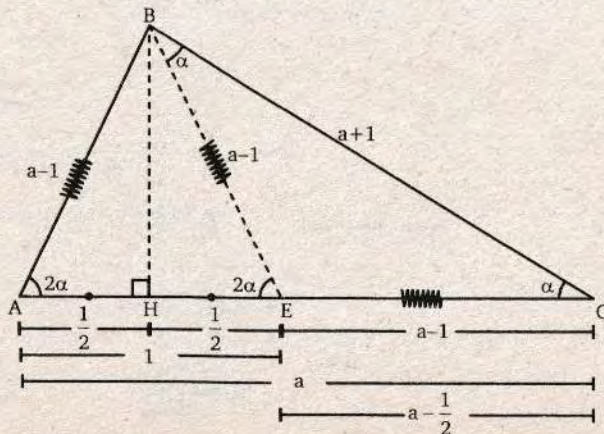
$$11 = a(a + 2b)$$

Reemplazando en (I): $5x = 11$

$$\therefore x = \frac{11}{5} \text{ cm}$$

Rpta.: A

Resolución 40:



Piden perímetro de $\triangle ABC$:

$$2p = 3a$$

Trazamos $\overline{BE}$ ($E \in AC$) tal que:

$$m\angle BAC = m\angle BEA = 2\alpha$$

$$\Rightarrow m\angle EBC = \alpha$$

$$\Rightarrow AB = BE = EC = a - 1$$

$$\Rightarrow AE = 1 \wedge AH = HE = \frac{1}{2}$$

$\triangle ABC$ (Teorema de las proyecciones):

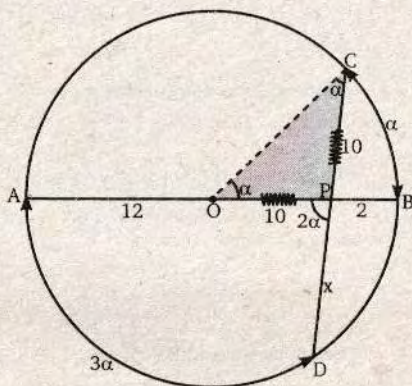
$$(a+1)^2 - (a-1)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$4a = (a)(a-1) \Rightarrow a = 5$$

$$\therefore 2p = 15$$

Rpta.: A

Resolución 41:



Piden $PD = x$

$$m\angle APD = \frac{3\alpha + \alpha}{2} = 2\alpha$$

$$m\angle COB = \alpha \text{ (ángulo central)}$$

$\Rightarrow \triangle OPC$: isósceles;

$$CP = PO = 10$$

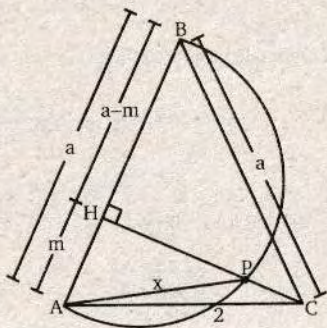
Teorema de las cuerdas (en P):

$$10x = 2(22)$$

$$\therefore x = 4,4 \text{ cm}$$

Rpta.: D

Resolución 42:



Piden :

$$AP = x$$

Teorema de la semicircunferencia:

$$x^2 = am \quad \dots (I)$$

 $\triangle BCA$ (Teorema de las proyecciones)

$$a^2 - 2^2 = (a - m)^2 - m^2$$

$$a^2 - 4 = a^2 - 2am$$

$$\Rightarrow am = 2$$

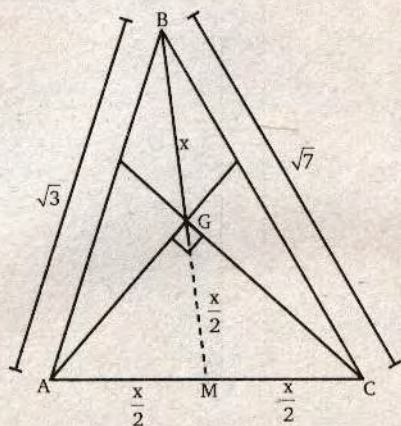
Reemplazando en (I)

$$x^2 = 2$$

$$\therefore x = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Rpta.: B

Resolución 43:



Piden $BG = x$

$$BG = 2(GM) \quad (G : \text{baricentro})$$

$$\rightarrow GM = \frac{x}{2}$$

Además:

$$MA = MC = GM \quad (\text{Teorema})$$

$\triangle ABC$:

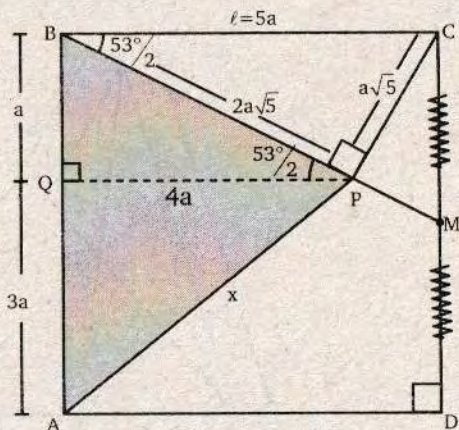
$$\sqrt{3}^2 + \sqrt{7}^2 = 2\left(x + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)^2}{2} \quad (\text{T. de la mediana})$$

$$10 = 2 \times \frac{9x^2}{4} + \frac{x^2}{2}$$

$$10 = \frac{40x^2}{8}$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

Rpta.: B

Resolución 44:

Piden $AP = x$

 $\triangle BCP$ y $\triangle BPQ$: notables de $\frac{53^\circ}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} BQ = 2a \wedge QP = 4a \\ BP = 2a\sqrt{5} \wedge BC = (a\sqrt{5})\sqrt{5} = 5a \end{cases}$$
$$\Rightarrow AQ = 3a$$

Δ BPA (Teorema de las proyecciones)

$$x^2 - (2a\sqrt{5})^2 = (3a)^2 - (2a)^2$$

$$x^2 - 20a^2 = 9a^2 - 4a^2$$

$$x^2 = 25a^2$$

$$x = 5a$$

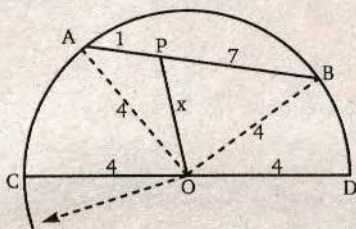
$$\mathbf{x} = \ell$$

En el problema $\ell = 2$ cm

$$\therefore x = 2 \text{ cm}$$

Rpta.: A

Resolución 45:



Piden :

$$PO = x$$

 $\triangle AOB$:

$$4^2 = x^2 + 1 \cdot 7 \quad (\text{T. Steward } \triangle \text{ Isósceles})$$

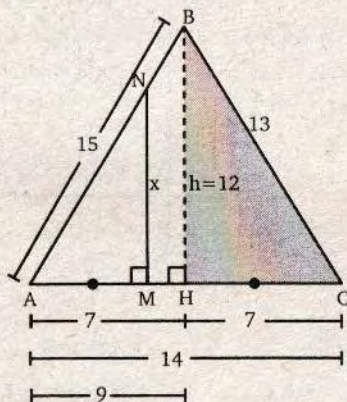
$$16 = x^2 + 7$$

$$9 = x^2$$

$$\therefore x = 3$$

Rpta.: C

Resolución 46:



Piden :

$$MN = x$$

Aplicamos el teorema de Heron para determinar $BH = h$:

$$p = \frac{15 + 13 + 14}{2} \Rightarrow p = 21$$

$$\Rightarrow h = \frac{2}{4} \sqrt{21(21-15)(21-13)(21-14)}$$

$$\Rightarrow h = 12$$

$\triangle BHC$ (conocido: De 5; 12 y 13):

$$HC = 5$$

$$\Rightarrow AH = 14 - 5 = 9$$

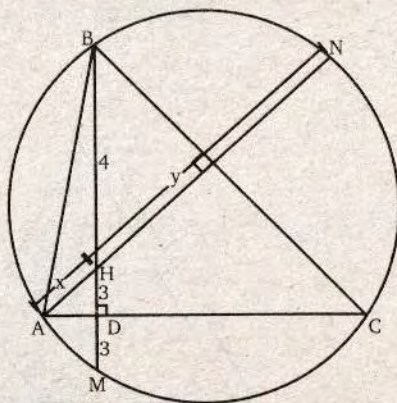
$\triangle ANM \sim \triangle ABH$:

$$\frac{x}{7} = \frac{12}{9}$$

$$\therefore x = \frac{28}{3} \text{ cm}$$

Rpta.: E

Resolución 47:



Piden :

$$(AH)(HN) = xy$$

Se observa :

"H" : ortocentro del $\triangle ABC$

Luego :

$$HD = DM = 3 \quad (\text{Teorema})$$

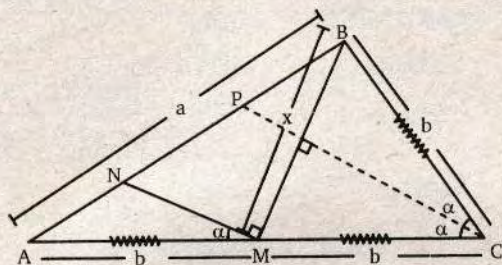
Finalmente :

$$xy = 4(3 + 3)$$

$$xy = 24$$

Rpta.: C

Resolución 48:



Piden : $BM = x$

Dato : $a^2 - b^2 = 8$

Trazamos $\overline{CP} \parallel \overline{MN} \Rightarrow \overline{CP} \perp \overline{BM}$ y $m\angle BCP = m\angle MCP = \alpha$

$\Rightarrow \triangle BCM = \text{es isósceles}$

$\Rightarrow BC = CM = b$

$\triangle ABC$ (Teorema de la mediana)

$$a^2 + b^2 = 2x^2 + \left(\frac{2b}{2}\right)^2$$

$$a^2 + b^2 = 2x^2 + 2b^2$$

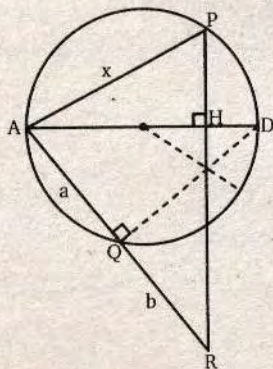
$$a^2 - b^2 = 2x^2$$

$$8 = 2x^2 \quad \dots (\text{del dato})$$

$$\therefore x = 2$$

Rpta.: B

Resolución 49:



$$AD = x$$
$$\overline{DQ} \rightarrow m\angle A Q D = 90^\circ$$

□QHDR : Inscriptible

Ademas :

 $\Delta APD :$

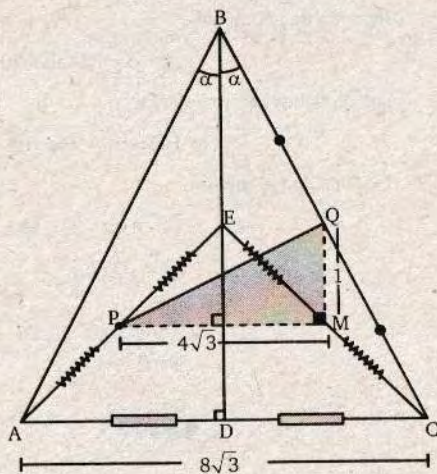
$$x^2 = (AH)(AD)$$

$$x^2 = a(a + b)$$

$$\therefore x = \sqrt{a(a+b)}$$

Rpta.: C

Resolución 52:



Piden : PQ

$\triangle ABC$: BD es bisectriz y mediana
 $\Rightarrow \overline{BD}$ es mediatriz de $\overline{AC}$

Trazamos $\overline{PM} \parallel \overline{AC}$: $\overline{PM}$ es base media del $\triangle AEC$

También $\overline{QM}$ es base media del $\triangle BCE \Rightarrow \overline{QM} \parallel \overline{BD}$

En consecuencia $\overline{PM} \perp \overline{QM}$

$\triangle PQM$ (Teorema de Pitágoras)

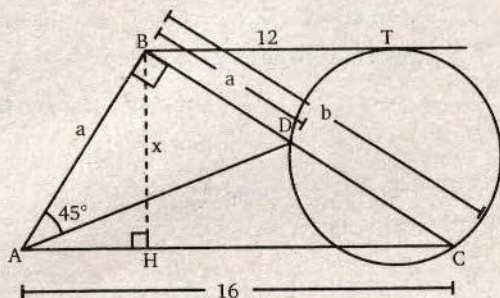
$$(PQ)^2 = (4\sqrt{3})^2 + (1)^2$$

$$(PQ)^2 = 49$$

$$\therefore PQ = 7$$

Rpta.: E

Resolución 53:



Piden :

$BH = x$

Se observa :

$AB = BD = a$

Sea :

$BC = b$

Luego :

$12^2 = ab \quad (\text{T. tangente})$

Además: $\triangle ABC$

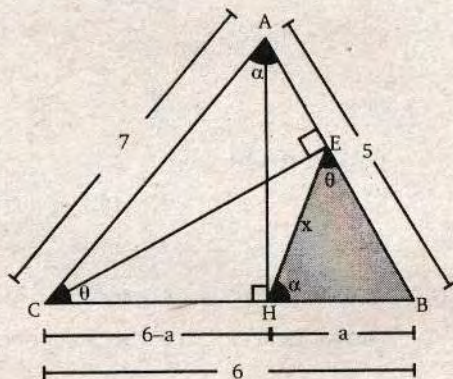
$ab = 16 \cdot x \quad (\text{Teorema})$

$12^2 = 16x$

$\therefore x = 9$

Rpta.: D

Resolución 54:



Piden: $EH = x$

$\triangle ABC$ (Teorema de las proyecciones)

$$(7)^2 - (5)^2 = (6 - a)^2 - (a)^2$$

$$24 = 36 - 12a$$

$$\Rightarrow a = 1$$

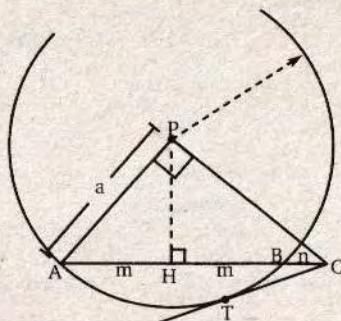
$\triangle BEH \sim \triangle BCA$:

$$\frac{x}{a} = \frac{7}{5}$$

$$\therefore x = \frac{7}{5}m$$

Rpta.: A

Resolución 55:



Piden: $\frac{AB}{BC} = ?$

Trazamos $\overline{PH}$ ($\overline{PH} \perp \overline{AB}$)

$\rightarrow AH = HB = m$ (Teorema)

Sea: $BC = n$

Luego: $a^2 = n(2m + n)$ (T. tangente)

También $\triangle APC$: $a^2 = m(2m + n)$ (Teorema)

Igualando : $n(2m+n) = m(2m+n)$

$$n = m$$

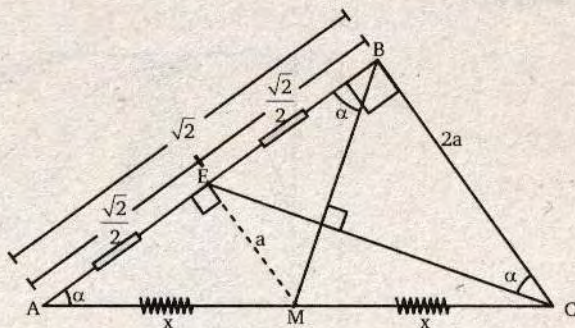
Entonces, piden:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2m}{m}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = 2$$

Rpta.: B

Resolución 56:



Piden : $AC = 2x$

$\triangle AEM$ (Teorema de Pitágoras)

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$x^2 = a^2 + \frac{1}{2} \quad \dots(I)$$

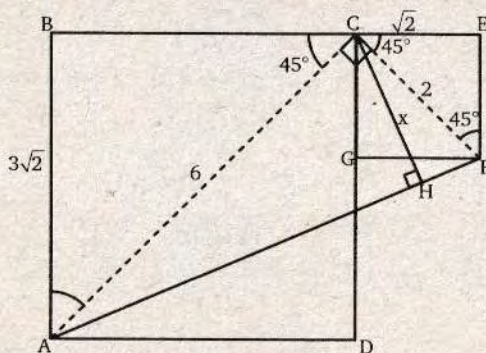
$\triangle AEM \sim \triangle CBE$:

$$a \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2a}$$

$$4a^2 = 1$$

$$a = \frac{1}{2} \quad \dots(II)$$

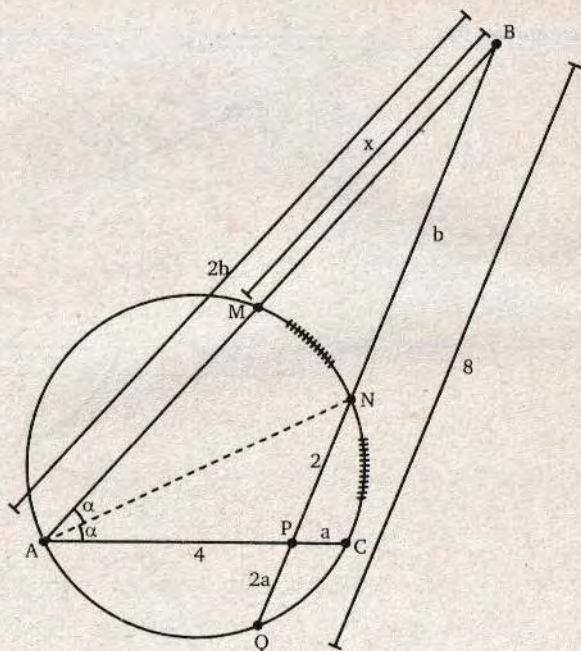
Piden : $AB = x$
 Se observa : $m\angle BCH = m\angle ABH = \beta$
 También : $m\angle HBP = \beta$
 Luego : $\triangle ABP$: isósceles ($\overline{BH}$: bisectriz , altura, mediana)
 Del dato : $(2m)AC = 50$
 $m(AC) = 25$
 Además : $x^2 = m(AC)$ (Relaciones metricas)
 $x^2 = 25$
 $\therefore x = 5$

Rpta.: C**Resolución 60:**

Piden : $CH = x$
 Se observa : $\triangle ABC$ y $\triangle CEF$ (Notables 45° y 45°)
 $\rightarrow AC = 6 \wedge CF = 2$
 Luego : $\triangle ACF$: $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{2^2}$ (Teorema)
 $\therefore x = \frac{3}{5}\sqrt{10}$

Rpta.: A

Resolución 61:



Piden $BM = x$

Dato: $m\widehat{MN} = m\widehat{NC}$

$$\Rightarrow m\angle MAN = m\angle NAC = \alpha$$

Teorema de las cuerdas:

$$(AP)(PC) = (QP)(PN)$$

$$4a = (PN)(2a) \Rightarrow PN = 2$$

Dato:

$$PB + BN = 6 \Rightarrow BQ = 8$$

ΔPAB (Teorema de la bisectriz interior)

$$\frac{4}{2} = \frac{AB}{BN} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2b \\ BN = b \end{cases}$$

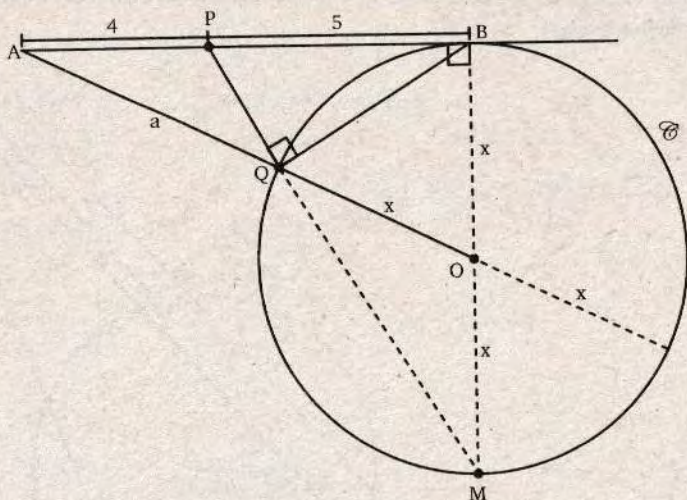
Teorema de las secantes:

$$(2b)(x) = (8)(b)$$

$$\therefore x = 4 \text{ cm}$$

Rpta.: A

Resolución 62:



Piden $OB = x$

Δ BAO (Teorema de Menelao – secante $\overleftrightarrow{PM}$)

$$(5)(a)(\cancel{x}) = (4)(\cancel{x})(2x)$$

$$5a = 8x \quad \dots\dots\dots (I)$$

Teorema de la tangente:

$$9^2 = (a + 2x).a$$

$$81 = a(a + 2x)$$

$$(81)(4) = a(4a + 8x)$$

$$(81)(4) = a(4a + 5a) \dots\dots(\text{De (I)})$$

$$(81)(4) = 9a^2$$

$$(9)(2) = 3a \Rightarrow a = 6$$

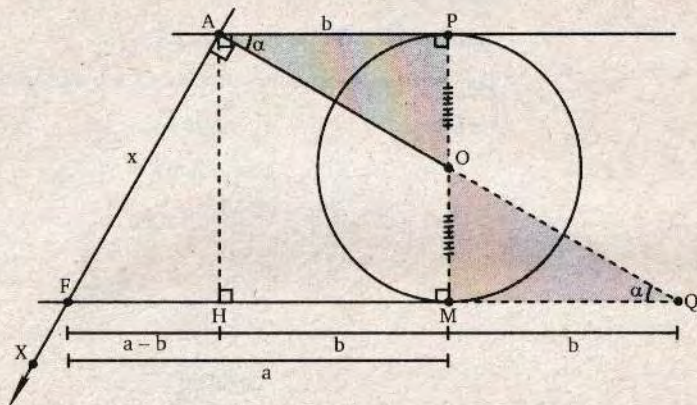
Reemplazando en (I): $5(6) = 8x$

$$\frac{15}{4} = x$$

$$\therefore x = 3,75$$

Rpta.: D

Resolución 63:



Piden $AF = x$

Dato $\overline{AP}$ y $\overline{FM}$ no se interceptan:

$$\Rightarrow \overline{AP} \parallel \overline{FM}$$

$$\triangle APO \cong \triangle QMO: \quad MQ = AP = b$$

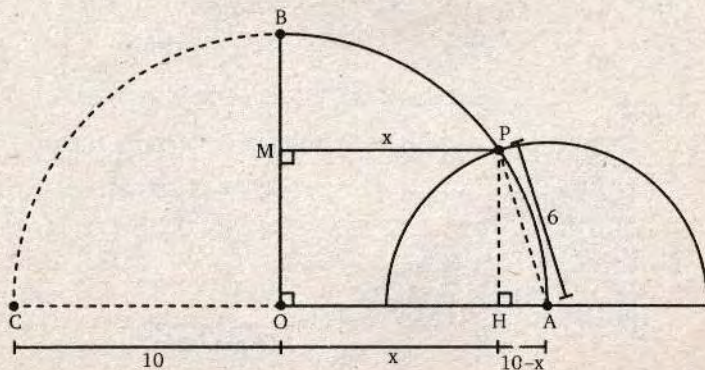
$\triangle FAQ$ (Relación métrica):

$$x^2 = (a+b)(a-b)$$

$$\therefore x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Rpta.: B

Resolución 64:



Piden: $PM = x$

Trazamos $\overline{PH} \perp \overline{OA} \Rightarrow HA = 10 - x$

Completamos la semicircunferencia del cuadrante AOB; con diámetro $\overline{AC}$.

Propiedad:

$$6^2 = 20(10 - x)$$

$$36 = 20(10 - x)$$

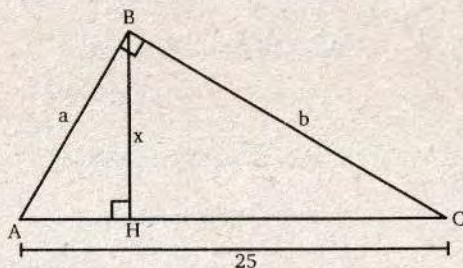
$$9 = 50 - 5x$$

$$x = \frac{41}{5}$$

$$\therefore x = 8,2$$

Rpta.: B

Resolución 65:



Piden $BH = x$.

Dato:

$$x + a + b = 47$$

$$\Rightarrow a + b = 47 - x \quad \dots\dots(1)$$

Propiedades de relaciones métricas en el $\triangle$

$$\begin{cases} ab = 25x \\ a^2 + b^2 = (25)^2 \end{cases}$$

Se sabe que:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$\Rightarrow (47 - x)^2 = (25)^2 + 2(25x)$$

$$47 - x = 5\sqrt{25 + 2x}$$

$$\downarrow$$

$$12$$

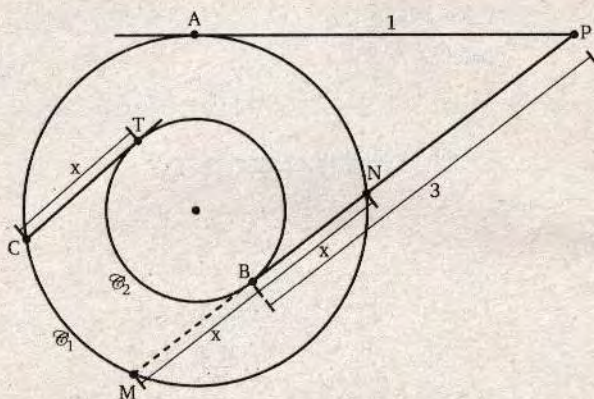
$$\downarrow$$

$$12$$

$$\therefore x = 12$$

Rpta.: B

Resolución 66:



Piden $CT = x$.

Es fácil probar que: $CT = MB = CN$

(basta con trazar los radios a los extremos de cada segmento y observar la congruencia de los triángulos rectángulos).

Teorema de la tangente (para E_1).

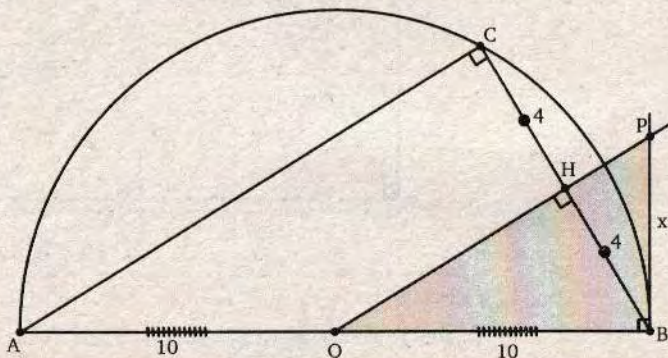
$$1^2 = (3+x)(3-x)$$

$$1 = 9 - x^2$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2}$$

Rpta.: C

Resolución 67:



BOLETÍN DE GEOMETRÍA - 06

Piden: $BP = x$.Dato: $\overline{OP} \parallel \overline{AC}$

$$\Rightarrow CH = HB = 4$$

$$\triangle OBP \text{ (Propiedad): } \frac{1}{4^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{10^2}$$

$$\frac{1}{16} - \frac{1}{100} = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{25} \right) = \frac{1}{x^2}$$

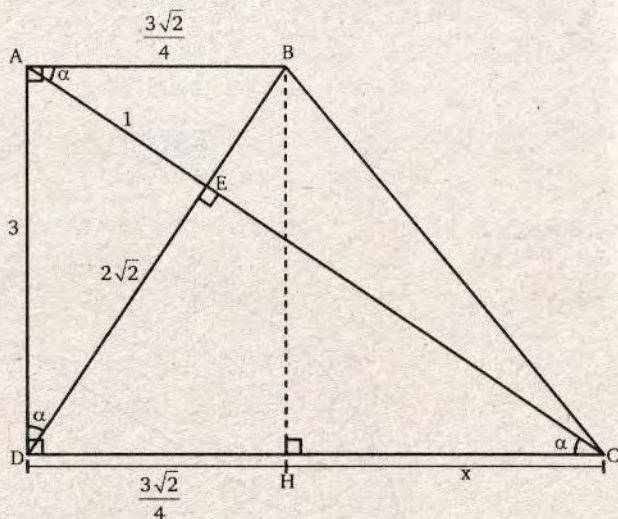
$$\frac{1}{4} \left(\frac{21}{100} \right) = \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{21}}{10} \right) = \frac{1}{x}$$

$$\therefore x = \frac{20\sqrt{21}}{21}$$

Rpta.: B

Resolución 68:

Piden: $CH = x$ $\triangle DAE$ (Teorema de Pitágoras):

$$(3)^2 = (1)^2 + (DE)^2 \Rightarrow DE = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle DAB \text{ (Propiedad): } \frac{1}{1^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{(AB)^2} \Rightarrow AB = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

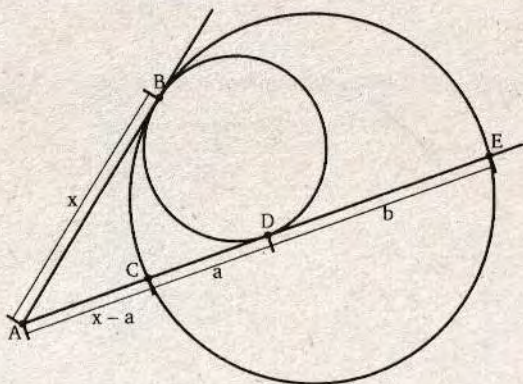
$$\triangle CDE - \triangle DAE: \quad \frac{x + \frac{3\sqrt{2}}{4}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{1}$$

$$\Rightarrow x + \frac{3\sqrt{2}}{4} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{21\sqrt{2}}{4}$$

Rpta.: A

Resolución 69:

Piden: $AB = x$

$$\text{Dato: } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{5} \quad \dots\dots(I)$$

Teorema de la tangente:

$$x^2 = (x+b)(x-a)$$

$$x^2 = x^2 + (b-a)x - ab$$

$$ab = (b-a)x$$

$$\frac{1}{x} = \frac{b-a}{ab}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \quad \dots\dots(II)$$

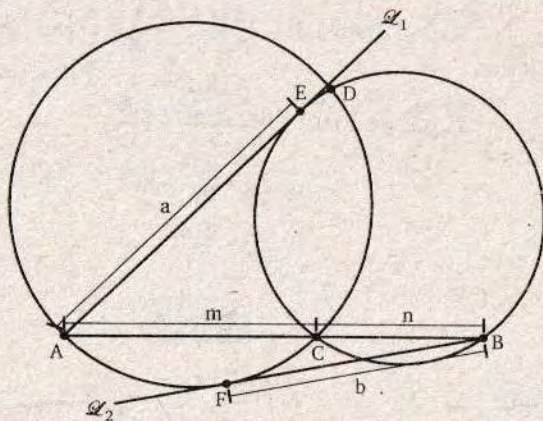
De (I) y (II):

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore x = 5$$

Rpta.: C

Resolución 70:



Piden: $AB = m + n = x$

Teorema de la tangente para:

$$\begin{aligned} Q_1 : a^2 &= xm + \quad + \\ Q_2 : b^2 &= xn \end{aligned}$$

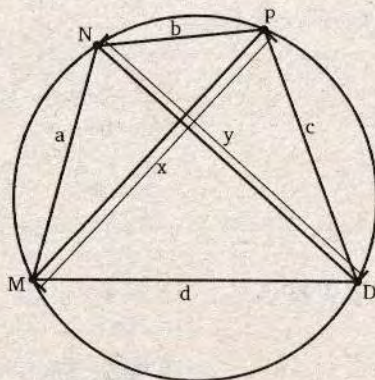
$$a^2 + b^2 = x(m + n)$$

$$a^2 + b^2 = x^2$$

$$\therefore x = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Rpta.: B

Resolución 71:



$$ab = 2Rh$$

Dato

$$30 = 2Rh \Rightarrow Rh = 15 \dots\dots\text{(IV)}$$

$\triangle ILO \sim \triangle PLI$:

$$\frac{x}{R} = \frac{h-r}{x}$$

$$x^2 = Rh - Rr$$

$$2x^2 = 2Rh - 2Rr$$

De (III) y (IV):

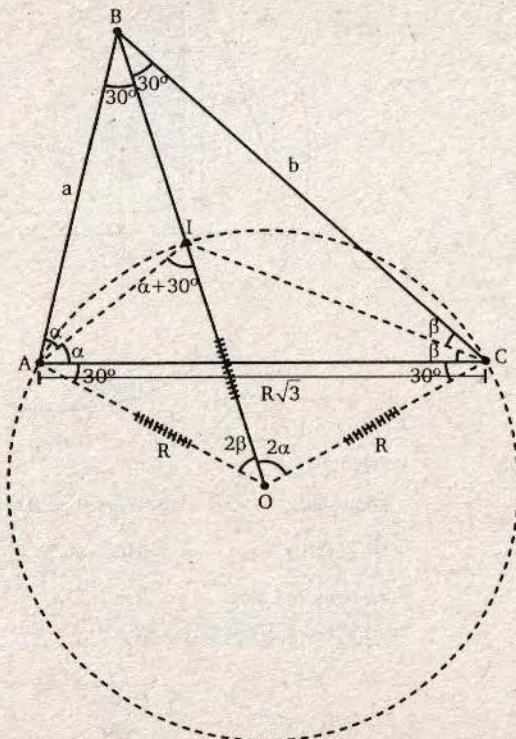
$$2x^2 = 2(15) - x^2$$

$$3x^2 = 30$$

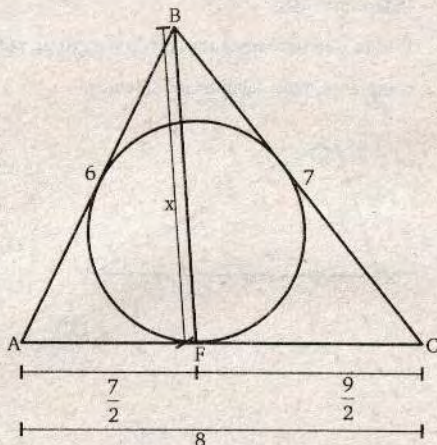
$$\therefore x = \sqrt{10}$$

Rpta.: E

Resolución 73:



Resolución 76:



Piden $BF = x$.

Semiperímetro: $p = \frac{6+7+8}{2} \Rightarrow p = \frac{21}{2}$

Teorema: $AF = p - 7$

$$AF = \frac{21}{2} - 7 \Rightarrow AF = \frac{7}{2} \Rightarrow FC = \frac{9}{2}$$

Teorema de Stewart: $6^2 \left(\frac{9}{2} \right) + 7^2 \left(\frac{7}{2} \right) = x^2 \cdot 8 + \left(\frac{7}{2} \right) \left(\frac{9}{2} \right) (8)$

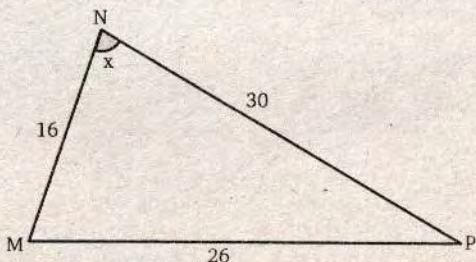
$$324 + 343 = 16x^2 + 252$$

$$415 = 16x^2$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{415}}{4} \text{ u}$$

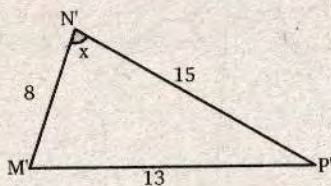
Rpta.: C

Resolución 77:



Piden: $m\angle MNP = x$.

Puesto que buscamos una medida angular, podemos trabajar con un triángulo semejante, para facilitar los cálculos.



$$(\triangle MNP \sim \triangle M'N'P')$$

Teorema de los cosenos:

$$(13)^2 = (8)^2 + (15)^2 - 2(8)(15)\cos x$$

$$169 = 64 + 225 - 240\cos x$$

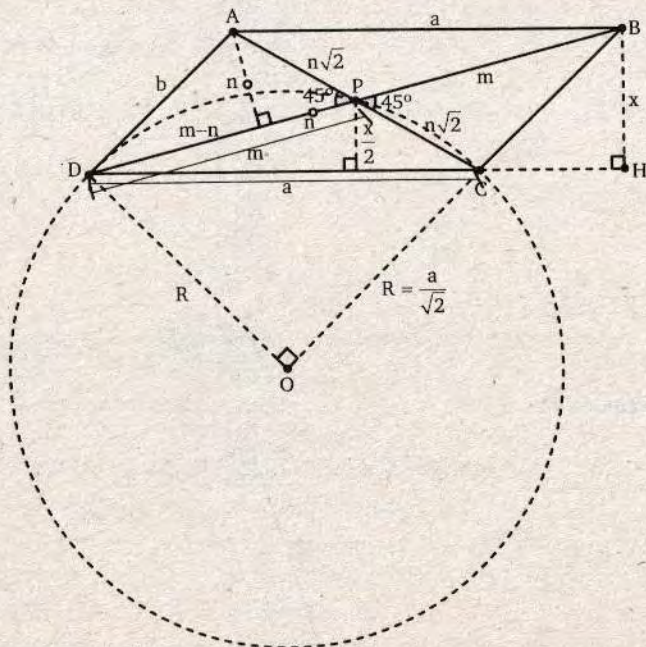
$$240\cos x = 120$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

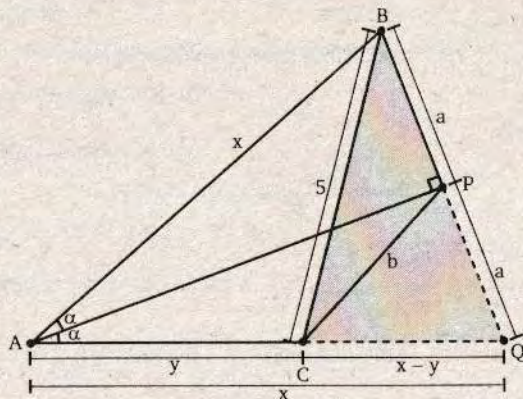
$$\therefore x = 60^\circ$$

Rpta.: D

Resolución 78:



Resolución 80:



Piden: $x - y$.

Dato: $a^2 + b^2 = 20$

Prolongamos $\overline{AC}$ y $\overline{BP}$, formando el triángulo isósceles BAQ ($AB = AQ = x$).

$\triangle QCB$ (Teorema de la mediana):

$$(x - y)^2 + (5)^2 = 2b^2 + \frac{(2a)^2}{2}$$

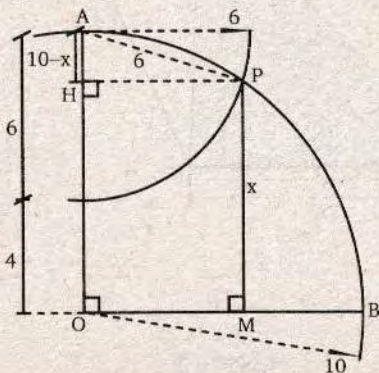
$$(x - y)^2 + 25 = 2 \underbrace{(a^2 + b^2)}_{20}$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = 15$$

$$\therefore x - y = \sqrt{15}$$

Rpta.: D

Resolución 81:



Piden: $PM = x$

Trazamos $\overline{PH}$ ($\overline{PH} \perp \overline{AO}$).

Luego:

$$AP = 6$$

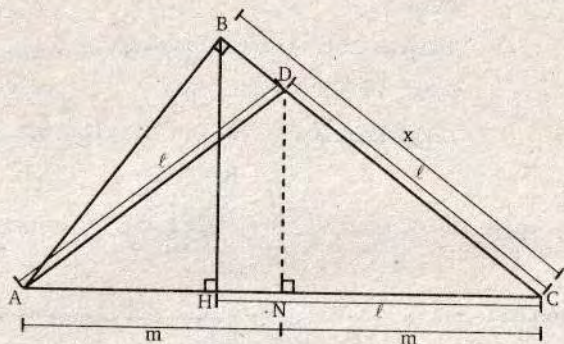
$$\rightarrow 6^2 = (10 - x)20$$

(Teorema)

$$\therefore x = 8,2$$

Rpta.: B

Resolución 82:



Piden: $BC = x$.

 ABC: $x^2 = \ell(2m) \dots\dots(I) \text{ (Teorema)}$

$\triangle BHC:$ $\frac{\ell}{x} = \frac{m}{\ell}$ (Teorema de Thales)

$$\rightarrow \ell^2 = xm \dots\dots (II)$$

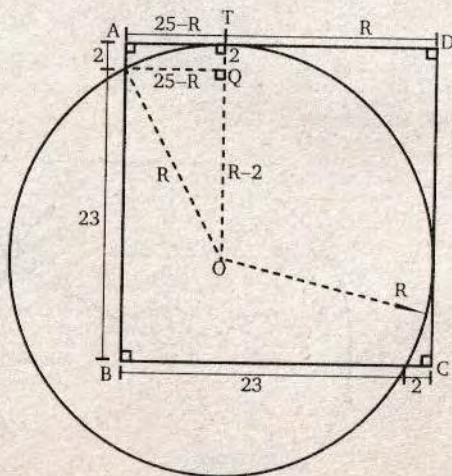
$$(I) \times (II): \quad x^2 \cdot x_m = \ell^2 \cdot \ell (2m)$$

$$x^3 = \ell^3.2$$

$$\therefore x = \ell \sqrt[3]{2}$$

Rpta.: C

Resolución 83:



Piden: $R = ?$

Trazamos: $\overline{OB}$ ($\overline{OB} \perp \overline{BA}$)

Se observa: $\theta + \alpha = 90^\circ$

Luego: $\triangle ABQ$: $(QA)^2 = 4(4 + 5)$ (Teorema)

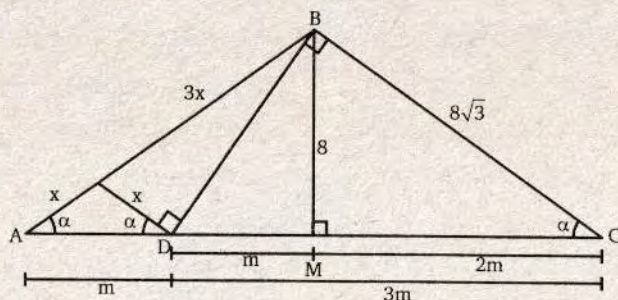
$$QA = 6$$

Finalmente: OBA : $(R + 6)^2 = R^2 + 9^2$ (Teorema de Pitágoras)

$$\therefore R = 3,75$$

Rpta.: D

Resolución 86:



Piden: $MD = x = ?$

Del dato: $m\angle BAH = m\angle BCH = \alpha$

También ($\overline{MD} \parallel \overline{BC}$): $m\angle MDA = m\angle BCH = \alpha$

Además: $AM = x \wedge AB = 4x$ (dato)

Luego: $\frac{AD}{DC} = \frac{m}{3m}$ (Teorema de Thales).

En $\triangle DBC$: $8^2 = m \times 2m$ (Teorema).

$$\rightarrow m = 4\sqrt{2}$$

En $\triangle DBC$: $BC^2 = 2m \times 3m$ (Teorema).

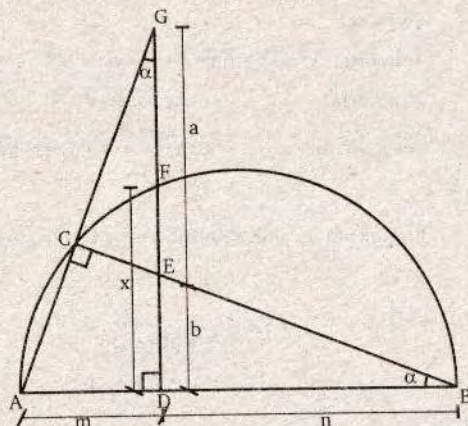
$$\rightarrow BC = 8\sqrt{3}$$

Finalmente: $4x = 8\sqrt{3}$ ($AB = BC$)

$$\therefore x = 2\sqrt{3}$$

Rpta.: E

Resolución 87:



Piden: $FD = x = ?$

$$x^2 = m \cdot n \quad (\text{Teorema})$$

Se observa:

$$m\angle CBA = m\angle AGD = \alpha$$

Luego:

$$ADG \sim EDB$$

$$\frac{m}{b} = \frac{a+b}{n}$$

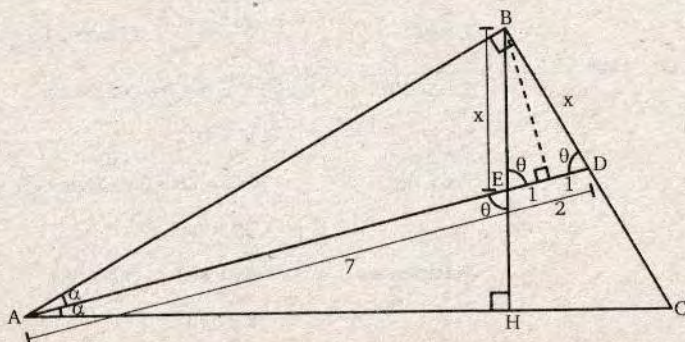
$$mn = b(a+b)$$

$$x^2 = b(a+b)$$

$$\therefore x = \sqrt{b(a+b)}$$

Rpta.: B

Resolución 88:



Piden $BE = x = ?$

Se observa: $m\angle AEH = m\angle BED = \theta$

También: $m\angle BDE = \theta$

$\rightarrow \triangle EBD$: Isósceles

Luego: trazamos $\overline{BT}$ ($\overline{BT} \perp \overline{ED}$):

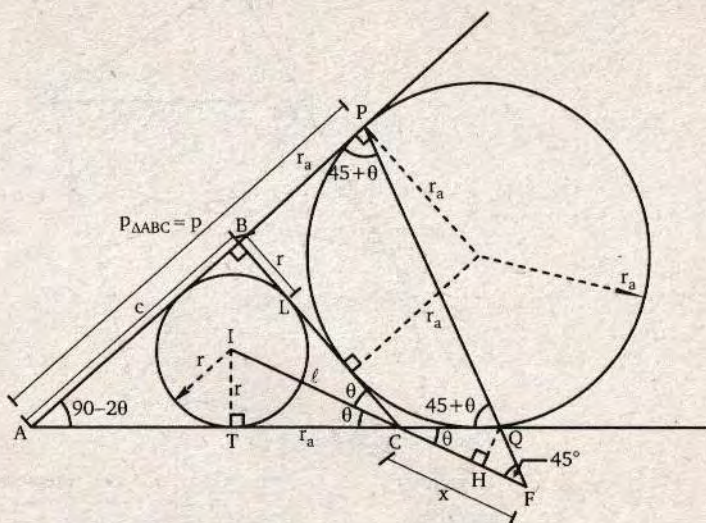
$\rightarrow ET = TD = 1$

Finalmente: $\triangle ABD$: $x^2 = 1 \times 9$

$\therefore x = 3$

Rpta.: C

Resolución 89: Piden: $FC = x = ?$



Se observa: $BP = r_a = p - c$

Propiedad: $CT = p_{\triangle ABC} - c$

$\rightarrow CT = r_a$

De igual modo: $BL = r = p_{\triangle ABC} - AC$ y $CQ = p_{\triangle ABC} - AC$

$\rightarrow CQ = r$

$\triangle CHQ$: $CH = r \cos \theta$

$\triangle QHF$: $QH = HF = r \sen \theta$

$$x = CH + HF = r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta$$

$$x = r(\cos \theta + \operatorname{sen} \theta)$$

△ ITC :

$$\cos \theta = \frac{r_a}{\ell}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{r}{\ell}$$

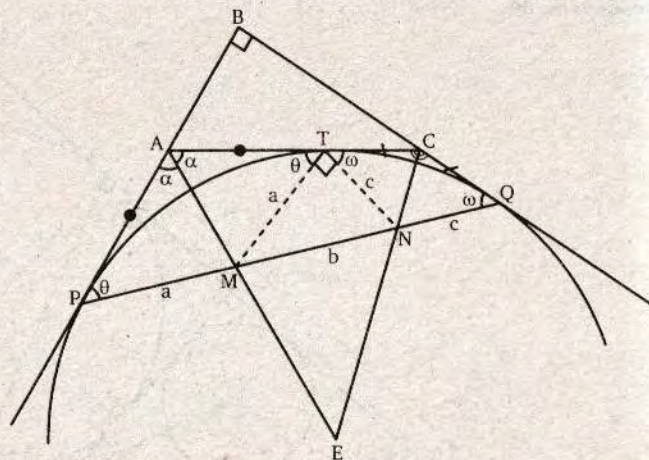
donde :

$$\ell = \sqrt{r^2 + r_a^2}$$

$$\therefore x = \frac{r(r + r_a)}{\sqrt{r^2 + r_a^2}}$$

Rpta.: A

Resolución 90:



Piden: la relación de: a, b y c

Del gráfico: $AP = AT \wedge TC = CQ$ (Propiedad).

También: $\triangle PAM \cong \triangle TAM$ (L - A - L)

$$\rightarrow PT = MT = a$$

$$\triangle TCN \cong \triangle QCN \rightarrow NQ = NT = c$$

$$\triangle PBQ : \quad \theta + \omega = 90^\circ$$

△ MTN: (Teorema de Pitágoras)

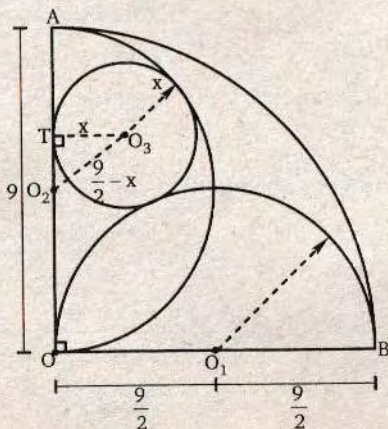
$$\therefore b^2 = a^2 + c^2$$

Rpta.: B

ΔOO_2O_1 (Teorema de Euclides:

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{R}{2}\right)^2 &= (R-x)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot x \\ x^2 + xR + \frac{R^2}{4} &= R^2 - 2Rx + x^2 + \frac{R^2}{4} - Rx \\ \therefore x &= \frac{R}{4} \end{aligned}$$

Resolución 92:



FONDO EDITORIALE
PRODO

Piden: $x = ?$

Se observa:

$$OT = 2\sqrt{\frac{9}{2} \cdot x} \rightarrow OT = 6\sqrt{\frac{x}{2}}$$

Luego:

$$TO_2 = 6\sqrt{\frac{x}{2} - \frac{9}{2}}$$

 O_3TO_2 : (Teorema de Pitágoras).

$$\left(6\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{9}{2}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{9}{2} - x\right)^2$$

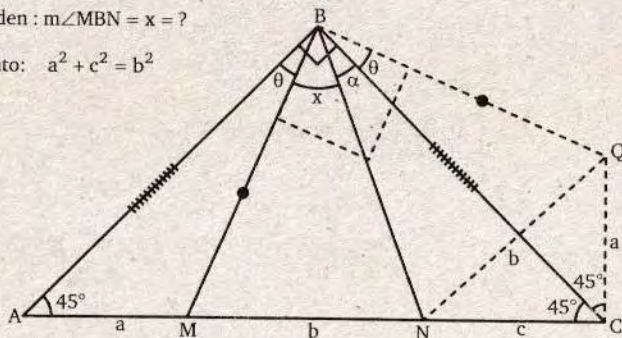
$$\therefore x = 2$$

Rpta.: B

Resolución 93:

Piden : $m\angle MBN = x = ?$

Dato: $a^2 + c^2 = b^2$



Sea $\overline{CQ} \perp \overline{AC}$ tal que $CQ = AM = a$

$$\triangle MAB \cong \triangle QCB (L - A - L):$$

$$MB = BQ \wedge m\angle ABM = m\angle CQB = \theta$$

Luego:

$$\alpha + \theta + x = 90^\circ \rightarrow m\angle MBQ = 90^\circ$$

 $\triangle NCQ:$

$$NQ^2 = \underline{a^2 + c^2}$$

$$NQ^2 = b^2 \quad \rightarrow \quad NQ = b$$

$$\triangle MBN \cong \triangle QBN \text{ (L-L-L)}$$

$$\rightarrow \alpha + \theta = x$$

Finalmente:

$$\alpha + \alpha + \theta = 90^\circ$$

$$x + x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

Rpta.: C

Piden: $IO = x = ?$

Trazamos IH: inradio.

$\triangle ABC$: Teorema de Poncelet.

$$6 + 8 = 10 + 2(IH)$$

$$IH = 2$$

Luego:

$$IN = NB = BM = MI = 2$$

$$\Rightarrow AM = 4 \wedge AH = 4$$

También:

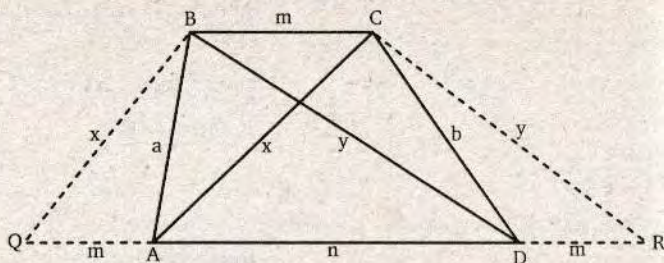
$$HO = 1$$

Finalmente: $\triangle IHO$ $x^2 = 2^2 + 1^2$ (teorema de Pitágoras).

$$\therefore x = \sqrt{5}$$

Rpta.: B

Resolución 96:



Piden: $\sqrt{x^2 + y^2} = ?$

Del dato:

$$a^2 + b^2 = 16 \wedge mn = 10$$

Trazamos:

$\overline{BQ} \parallel \overline{CA} \parallel \overline{BQAC}$: Paralelogramo

$\overline{CR} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{BCRD}$: Paralelogramo

Luego: $\triangle QBD$:

$$x^2n + y^2m = a^2(m+n) + mn(m+n) \text{ (T. de Stewart).}$$

$$x^2m + y^2n = b^2(m+n) + mn(m+n) \text{ (T. de Stewart).}$$

$$(x^2 + y^2)(m+n) = (m+n)(a^2 + b^2 + 2mn)$$

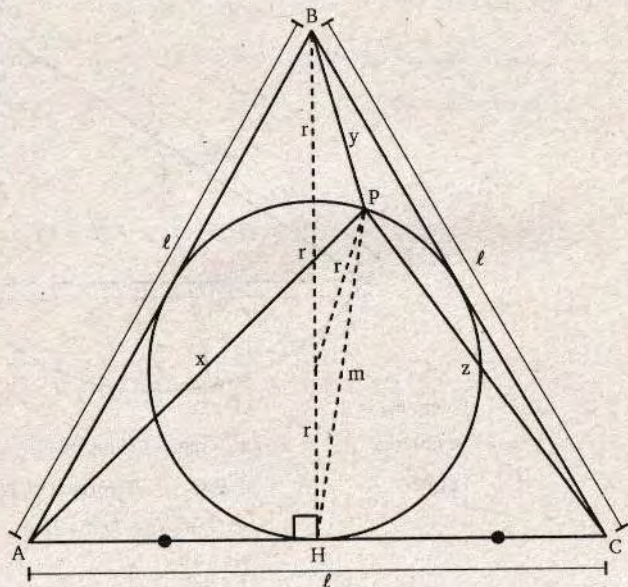
$$x^2 + y^2 = 16 + 2 \times 10$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{36}$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + y^2} = 6$$

Rpta.: E

Resolución 97: Piden: $(AP)^2 + (BP)^2 + (PC)^2 = x^2 + y^2 + z^2 = ?$



$\triangle APC$: (Teorema de la mediana):

$$x^2 + z^2 = 2m^2 + \frac{\ell^2}{2} \dots\dots(1)$$

$\triangle BPH$: (Teorema de Stewart):

$$m^2(2r) + y^2r = r^2(3r) + r(2r)(3r)$$

$$2m^2 + y^2 = 3r^2 + 6r^2 \dots\dots(2)$$

(1) + (2):
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\ell^2}{2} + 9r^2$$

Pero:

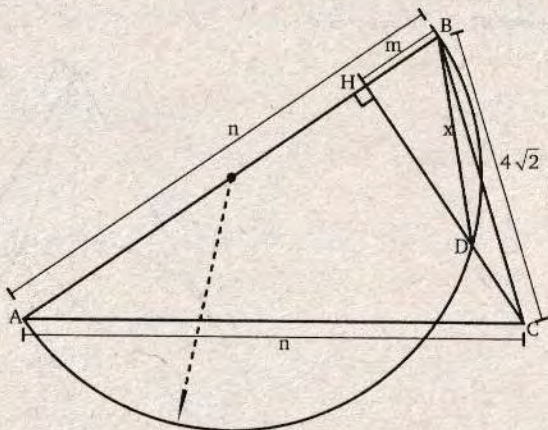
$$3r = \frac{\ell}{2}\sqrt{3}$$

$$\rightarrow 9r^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\ell^2}{2} + \frac{3}{4}\ell^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = \frac{5}{4}\ell^2$$

Rpta.: D

Resolución 98:

Piden: $BD = x$

Se observa:

$$x^2 = mn \quad (\text{Propiedad})$$

Luego:

 ΔABC (Teorema de Euclides).

$$n^2 = n^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2mn$$

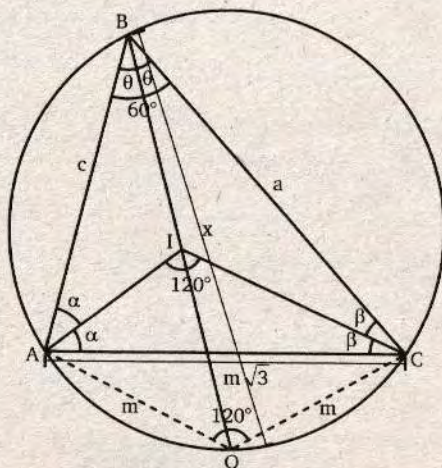
$$\underline{mn} = 16$$

$$x^2 = 16$$

$$\therefore x = 4$$

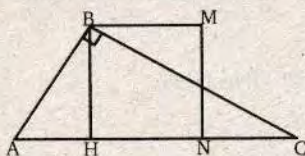
Rpta.: E

Resolución 99:



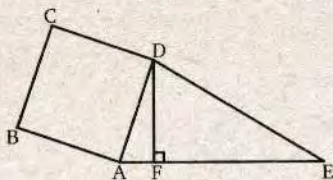
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el gráfico, HBMN es un cuadrado además, $BM=2$ y $AC=5$. Calcule NC.



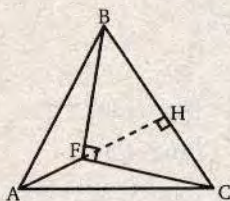
- A) 2 B) 3 C) 1
D) 0,5 E) 1,5

2. En el gráfico, $\overline{BD}$ es la diagonal del cuadrado ABCD, además, $(AF)(AE)=16$. Calcule BD.



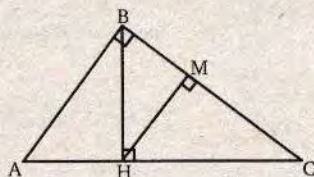
- A) $2\sqrt{2}$ B) 3 C) $4\sqrt{2}$
D) 8 E) 4

3. En la figura, $AB=BC$ y $AC=8\sqrt{2}$ m. Hallar FC.



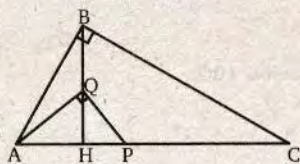
- A) 6 m B) 8 m C) 10 m
D) 5 m E) 4 m

4. Según el gráfico, si $AB=3$ u y $HC=8$ u, calcule HM.



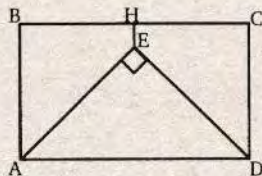
- A) 1 u B) $8/3$ u C) $8/9$ u
D) $1/9$ u E) $3/8$ u

5. En el gráfico, si $BQ=QH$ y $HP=1$ cm, calcule PC.



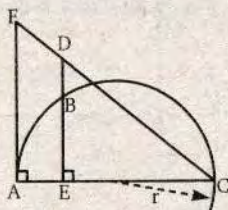
- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 2,5

6. En el gráfico ABCD es un rectángulo. Si $BH=4$ cm y $HC=9$ cm, calcule DE. $(\overline{HE} // \overline{CD})$



- A) $2\sqrt{7}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $\sqrt{127}$
D) $\sqrt{117}$ E) $\sqrt{115}$

7. En el gráfico, si $AF = 10$ cm y $DB = BE = 4$ cm, calcule r .

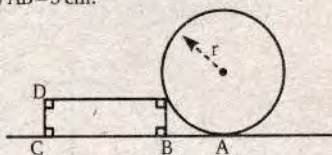


- A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

8. La razón de los catetos de un triángulo rectángulo es $\frac{4}{9}$. Calcular la razón de sus proyecciones sobre la hipotenusa.

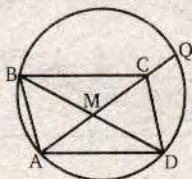
- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{16}{81}$
D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{64}{729}$

9. Según el gráfico, calcule el radio de la circunferencia mostrada si $CD = 1$ cm y $AB = 3$ cm.



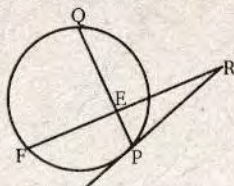
- A) 3 B) 4 C) 6
D) 5 E) 7

10. En el gráfico, si $AM = 10$ cm y $MD = 12$ cm, calcule CQ. Si $\square ABCD$ es un romboide.



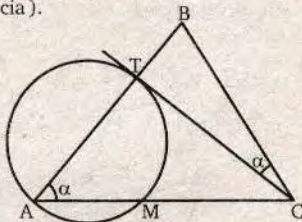
- A) 4,4 B) 2,8 C) 3,4
D) 4 E) 5

11. Según el gráfico, $FE=10$ cm , $QE=5$ cm, $EP=4$ cm, $PR=8$ cm.
Calcule el perímetro del triángulo PER, si P es punto de tangencia.



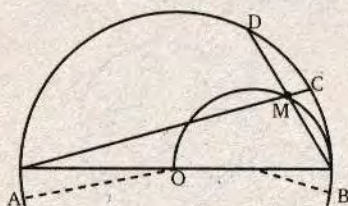
- A) 16 B) 18 C) 20
D) 22 E) 24

12. Del gráfico, si $2(AT) = 3(TB)$ y $AM = 6$ cm, calcule CT. (T es punto de tangencia).



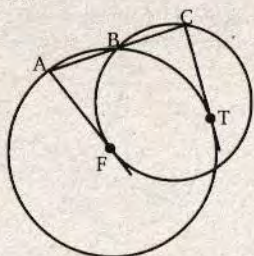
- A) $\sqrt{10}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $5\sqrt{2}$
D) $10\sqrt{2}$ E) 10

13. Del gráfico, si $AM = 12$ cm y $MC = 3$ cm, calcule DB.



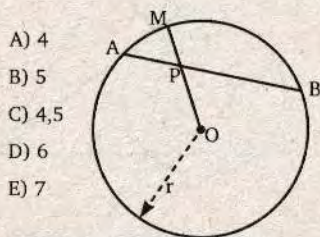
- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

14. En el gráfico, $AB = 8$ cm y $AF = 12$ cm. Calcule CT si F y T son puntos de tangencia.



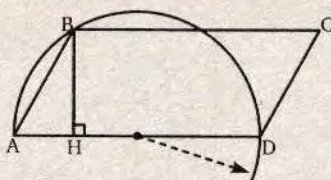
- A) $3\sqrt{6}$ B) $6\sqrt{5}$ C) $4\sqrt{5}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $\sqrt{13}$

15. En el gráfico, si $AP = 5$; $PB = 15$ y $r = 10$, calcule PO.



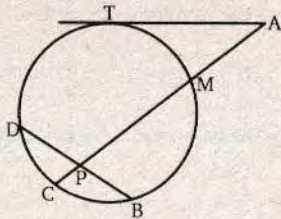
- A) 4
B) 5
C) 4,5
D) 6
E) 7

16. Calcule BH, si ABCD es un paralelogramo, $AH = 3$ y $BC = 15$.



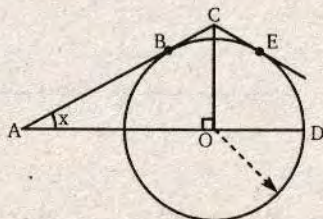
- A) 10 B) 9 C) 8
D) 6 E) 7,5

17. Según el gráfico, $AM = 6$ M; $PC = 2$; $DP = 4$ y $PB = 5$. Calcule AT si T es punto de tangencia.



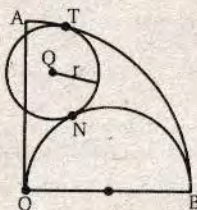
- A) $6\sqrt{3}$ B) $5\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$

18. Si B y E son puntos de tangencia, además, $AB = 9$ y $CE = 1$. calcule x.



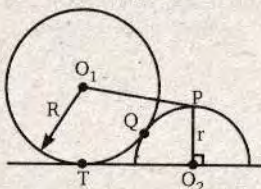
- A) 53° B) 37° C) 45°
D) $53^\circ / 2$ E) $37^\circ / 2$

19. En la figura, AOB es un cuadrante, N y T son puntos de tangencia, $\widehat{OB}$ es diámetro de la semicircunferencia y Q es centro de la circunferencia. Si $OA = 10$ cm y $r = 3$ cm, hallar la distancia de Q a $\widehat{OB}$.



- A) 5 cm B) $3\sqrt{5}$ cm C) $4\sqrt{2}$ cm
D) 6 cm E) $4\sqrt{3}$ cm

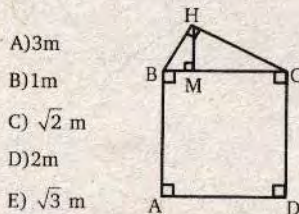
20. En la figura, T y Q son puntos de tangencia, O_1 y O_2 son centros. Si $r = 2$ m y $R = 4$ m, hallar PO_1 .



- A) $5\sqrt{2}$ m B) $2\sqrt{6}$ m C) $2\sqrt{3}$ m
D) $6\sqrt{3}$ m E) $2\sqrt{5}$ m

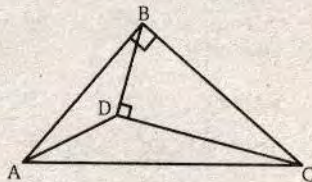
21. En la figura, $AB = BC$ y $m\widehat{BAM} = \frac{37^\circ}{2}$

Si $AB = 3$ m, hallar BH.



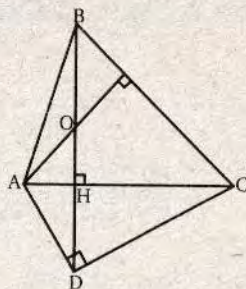
- A) 3m
B) 1m
C) $\sqrt{2}$ m
D) 2m
E) $\sqrt{3}$ m

22. En la figura, $AB = BC$. Si $BD = 3$ cm y $DC = 8$ cm, hallar AD.



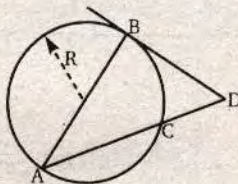
- A) $\sqrt{34}$ cm B) $\sqrt{37}$ cm C) $\sqrt{33}$ cm
D) $\sqrt{39}$ cm E) $\sqrt{31}$ cm

23. En la figura, $CH = 4$ m y $OH = 2$ m. Hallar OB.



- A) 5 m B) 6 m C) 7 m
D) 4 m E) 5,5 m

24. En el gráfico, si $m\widehat{BC} = 90^\circ$ y $CD = 8$ cm, calcule R (B: punto de tangencia)

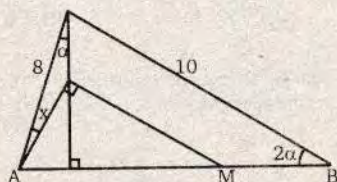


- A) $6\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

25. Calcule el perímetro de una región triangular cuyos lados son proporcionales a los números 13;37 y 40 si se sabe que la longitud de la menor altura es 24.

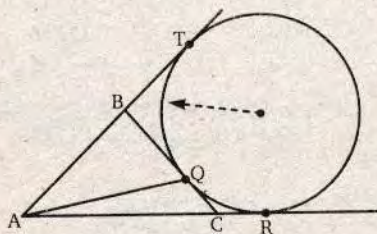
A) 120 B) 360 C) 180
D) 240 E) 540

26. Del gráfico, calcule x si se sabe que $AM=MB$.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

27. Del gráfico que se muestra, calcule AQ si se sabe que $AB=5$, $BC=6$, $AC=7$ y T, Q, R son puntos de tangencia.



A) $\sqrt{31}$ B) $\sqrt{32}$ C) $\sqrt{33}$
D) $\sqrt{34}$ E) $\sqrt{35}$

28. En un cuadrilátero ABCD,

si $AB^2 + CD^2 = 120$; $BC^2 + AD^2 = 140$ y $AC=5$, además, se trazan perpendiculares BM y DN relativas a $\overline{AC}$, calcule MN .

A) 1 B) 1,5 C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) $\sqrt{3}$

29. En un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura AN de longitud 4.

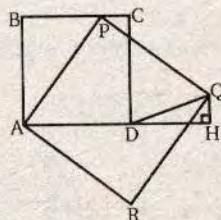
Si $(AB)^2 + (AC)^2 - (BC)^2 = 6$, calcule $(BN)(NC)$.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 13 E) 14

30. Si las bases de un trapecio miden 4 y 10; los lados laterales, 5 y 7, calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases.

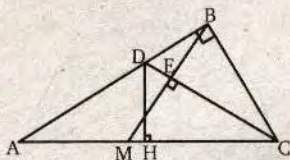
A) $\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $3\sqrt{7}$
D) $3\sqrt{5}$ E) 6

31. En la figura, ABCD y APQR son cuadrados. Si $AB=4m$, $AP=5m$ y $DQ=2\sqrt{3}m$, hallar DH .



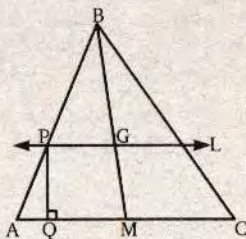
A) $\frac{7}{3}m$ B) $\frac{5}{3}m$ C) $\frac{4}{3}m$
D) $\frac{2}{3}m$ E) $\frac{11}{4}m$

32. En la figura, $AM=MC$, $DC=10$ cm y $HC=8$ cm. Hallar DE .



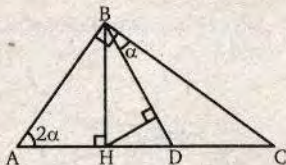
- A) 2,5 cm B) 2 cm C) $\sqrt{3}$ cm
D) 3 cm E) 3.5 cm

33. En la figura, G es baricentro del triángulo ABC y $L \parallel \overline{AC}$. Si $AB = 13$ cm, $BC = 15$ cm y $AC = 14$ cm, hallar PQ.



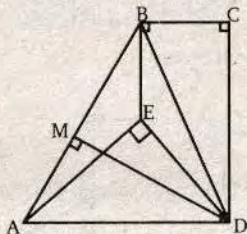
- A) 8 cm B) 4 cm C) 6 cm
D) 5 cm E) 3 cm

34. En la figura, $AH=4$ cm y $HC=5$ cm.
Hallar HM .



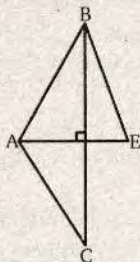
- A) $\frac{\sqrt{30}}{3}$ cm B) $\frac{\sqrt{33}}{3}$ cm C) $\frac{\sqrt{31}}{3}$ cm
D) $\frac{\sqrt{29}}{3}$ cm E) $\frac{\sqrt{27}}{3}$ cm

35. En la figura, $AD=BD$ y $BM=2\sqrt{2}$ cm. Hallar AE .



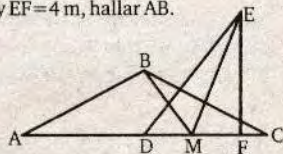
- A) $3\sqrt{2}$ cm B) $4\sqrt{2}$ cm C) 4 cm
D) $2\sqrt{3}$ cm E) $2\sqrt{5}$ cm

36. En la figura, $AE=EB=20$ cm y $AB=AC=12\sqrt{5}$ cm. Hallar la distancia del baricentro del triángulo ABC al vértice A.



- A) 12 cm B) 8 cm C) 9 cm
D) 14 cm E) 10 cm

37. En la figura, $DM=BM=MF$ y $AM=ME=MC$. Si $BC=5\text{m}$, $DE=7\text{m}$ y $EF=4\text{m}$, hallar AB .

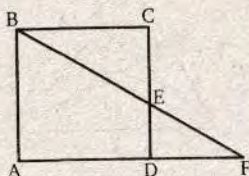


- A) $\sqrt{10}$ m B) $3\sqrt{10}$ m C) $4\sqrt{10}$ m
D) $2\sqrt{10}$ m E) $5\sqrt{10}$ m

38. En la figura, ABCD es un cuadrado.

$$\text{Si numéricamente } \frac{1}{AB^2} - \frac{1}{BE^2} = \frac{1}{36}$$

hallar BF en cm.



- A) 3,6 cm B) 4,8 cm C) 5,6 cm
D) 6 cm E) 7,2 cm

39. La proyección del punto medio de un cateto sobre la hipotenusa determina sobre esta, dos segmentos cuya diferencia de los cuadrados de sus longitudes es 24 m^2 .

Hallar la longitud del otro cateto.

- A) $2\sqrt{3} \text{ m}$ B) $3\sqrt{2} \text{ m}$ C) 4 m
D) $2\sqrt{2} \text{ m}$ E) $2\sqrt{6} \text{ m}$

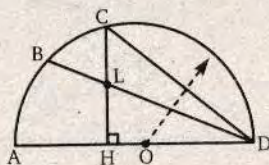
40. Dado un triángulo ABC, $AB = 2 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ y la longitud de la mediana relativa al lado $\overline{AC}$ es un número entero. Hallar AC.

- A) $2\sqrt{5} \text{ m}$ B) $5\sqrt{2} \text{ m}$ C) $4\sqrt{3} \text{ m}$
D) $2\sqrt{6} \text{ m}$ E) $6\sqrt{2} \text{ m}$

41. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$ y la altura $\overline{BH}$. Si $AB = HC$, $BC = 12 \text{ cm}$ y $m\angle C = 2m\angle A$, hallar HC.

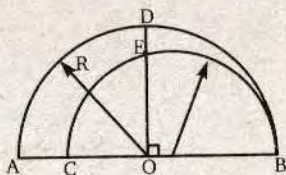
- A) $5\sqrt{11} \text{ cm}$ B) $3\sqrt{11} \text{ cm}$ C) $3\sqrt{10} \text{ cm}$
D) $2\sqrt{11} \text{ cm}$ E) $4\sqrt{10} \text{ cm}$

42. En la figura $DL = 25 \text{ u}$ y $BL = 11 \text{ u}$, entonces la longitud del segmento CD es (en u)



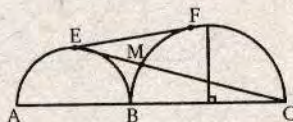
- A) 28 B) 30 C) 35
D) 29 E) 32

43. En la figura: $AC = a$
 $DE = b$, entonces la longitud del radio es:



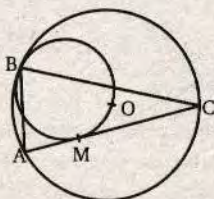
- A) $\frac{b^2}{a+b}$ B) $\frac{a^2}{2b-a}$ C) $\frac{b^2}{2a-b}$
D) $\frac{a^2}{2a-b}$ E) $\frac{b^2}{2b-a}$

44. En la figura mostrada $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son diámetros, E y F son puntos de tangencia. Si: $EM = 3u$ y $BC = 2AB$. Entonces EF mide:



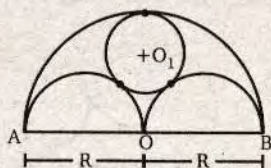
- A) $2\sqrt{5} \text{ u}$ B) $3\sqrt{5} \text{ u}$ C) $4\sqrt{5} \text{ u}$
D) $2\sqrt{3} \text{ u}$ E) $4\sqrt{3} \text{ u}$

45. En la figura mostrada O es el centro de la circunferencia mayor, O es un punto de la circunferencia menor. Si $AM=3$ y $MC=4$, halle $(AB)(BC)$:



- A) $6u^2$ B) $9u^2$ C) $12u^2$
D) $18u^2$ E) $24u^2$

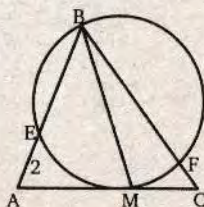
46. En la figura mostrada halle la longitud del radio de la circunferencia de centro O_1 , en función de R , AO , OB y AB son los diámetros de las semicircunferencias.



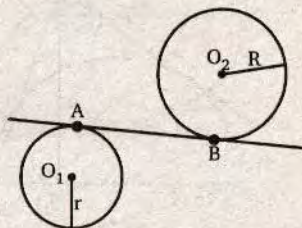
- A) $\frac{R}{4}$ B) $\frac{R}{3}$ C) $\frac{R}{5}$
D) $\frac{2R}{7}$ E) $\frac{R}{6}$

47. En el triángulo ABC de mediana BM, $\overline{AC}$ es tangente en M a la circunferencia siendo $AB=8$, $BE=6$, $BC=10$. Entonces $\overline{BF}$ mide:

- A) 8
B) 8,1
C) 8,2
D) 8,3
E) 8,4



48. A y B son puntos de tangencia, si la distancia entre los centros O_1 y O_2 es de entonces AB es:



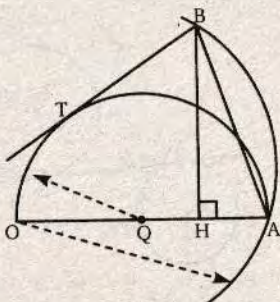
- A) $\sqrt{2d^2 - (R + 2r)}$
B) $\sqrt{(r + R)^2 + d^2}$
C) $\sqrt{(R + r)^2 - d^2}$
D) $2\sqrt{d^2 - (R - r)^2}$
E) $\sqrt{d^2 - (R + r)^2}$

49. En un triángulo ABC, se traza la altura BH (H en AC) tal que $(HC)^2 - (AH)^2 = 4u^2$, calcule $E = (BC)^2 - (AB)^2$.
- A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 20

50. El perímetro de un rombo es 40 cm y una de sus diagonales mide 12 cm. Calcule el radio de la circunferencia inscrita en el rombo.

- A) 6,2 B) 4,8 C) 5,2
D) 3,8 E) 5,8

51. En el gráfico, T es punto de tangencia si $(OA)(HA) = 24 \text{ cm}^2$, calcule TB.

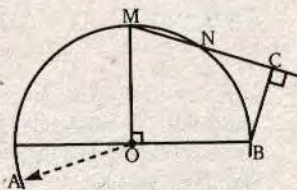


- A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{6}$ E) $3\sqrt{2}$

52. En un rectángulo ABCD con diámetro $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ se trazan semicircunferencias interiores que se intersectan en el punto Q. Si $AQ = 9 \text{ cm}$ y $QC = 4 \text{ cm}$, calcule BQ.

- A) $2\sqrt{15}$ B) $3\sqrt{13}$ C) $5\sqrt{7}$
D) $2\sqrt{14}$ E) $\sqrt{11}$

53. En el gráfico; si $MN = 2 \text{ cm}$ y $BC = 3 \text{ cm}$, calcule AN.



- A) $4\sqrt{5}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

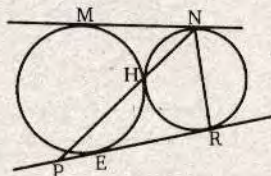
54. En una circunferencia de radio 12 cm se trazan dos diámetros perpendiculares: $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si M es el punto medio de la cuerda $\overline{BC}$, calcule AM.

- A) $6\sqrt{10}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $7\sqrt{10}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{10}$

55. En un triángulo ABC recto en B se traza la bisectriz interior AN la cual interseca a la ceviana interior BM en P. Calcule MC, si $BP = PM$, $BN = 4 \text{ cm}$ y $NC = 9 \text{ cm}$.

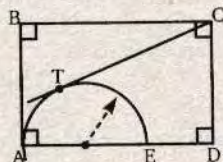
- A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{13}$

56. Del gráfico M, N, R y E son puntos de tangencia, $HN = 2$ y $NR = 3$. Halle PR.



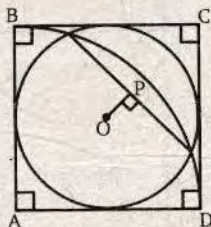
- A) $2/3$ B) $6/5$ C) $8/5$
D) $12/5$ E) $16/5$

57. Del gráfico M, N, R y E son puntos de tangencia, $HN = 2$ y $NR = 3$. Halle PR.



- A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$
D) 3 E) 4

65. En la figura mostrada el lado del cuadrado mide $8\sqrt{2}$. El punto O es el centro de la circunferencia, halle la longitud de $\overline{OP}$.



- A) 1,0 B) 1,4 C) 2,0
D) 2,5 E) 3,0

66. En un cuadrante cuyo radio mide R, en su interior y considerando como diámetro uno de sus radios se dibuja una semicircunferencia. Entonces, la longitud del radio de la circunferencia tangente al otro radio, tangente al arco semicircunferencia y tangente al arco del cuadrante es:

- A) $\frac{R}{2}$ B) $\frac{R}{3}$ C) $\frac{R}{4}$
D) $\frac{R}{5}$ E) $\frac{R}{6}$

67. En un cuadrante AOB, M es un punto de $\overline{AO}$. Si $OB=R$ y $AM=3(MO)$, entonces la longitud del radio de la circunferencia tangente a la prolongación de $\overline{OB}$, al arco AB y a la semicircunferencia de centro A y radio $\overline{AM}$ es:

- A) $\frac{22}{25}R$ B) $\frac{23}{24}R$ C) $\frac{23}{25}R$
D) $\frac{22}{23}R$ E) $\frac{24}{25}R$

68. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O se dibujan interiormente dos semicircunferencias de diámetros $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$; luego se construye una circunferencia tangente exterior a las dos semicircunferencias últimas en N y L, y tangente interior a la primera semicircunferencia en M, si $AB=2R$, entonces MN es:

- A) $\frac{R\sqrt{5}}{8}$ B) $\frac{R\sqrt{10}}{5}$ C) $\frac{R\sqrt{10}}{10}$
D) $\frac{R\sqrt{5}}{10}$ E) $\frac{R\sqrt{10}}{2}$

69. En un triángulo isósceles ABC ($AB \cong BC$), sobre la altura $\overline{CH}$ se toma un punto D tal que $m\angle ADB=90^\circ$, $AD=2u$, calcule la longitud del lado $\overline{AC}$.

- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

70. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias congruentes tangentes exteriormente en T de centros O_1 y O_2 respectivamente. Sean $M \in C_1$ y Q en el exterior de ambas circunferencias. Si $MQ=TO_2$, $m\angle QMO_2=90^\circ$ y $MT^2 + TO_2^2 = 50 \text{ cm}^2$, entonces QO_2 (en cm) es:

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

71. En un triángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 900 dm^2 , entonces la suma de los cuadrados de las distancias del bari-centro a los vértices del triángulo (en dm^2) es.
 A) 150 B) 200 C) 240
 D) 270 E) 300
72. Los lados de un triángulo miden $AB=6 \text{ u}$, $BC=5 \text{ u}$ y $AC=7 \text{ u}$. Calcule la distancia (en u) del bari-centro al lado $\overline{AC}$.
 A) $\frac{2\sqrt{3}}{7}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{2\sqrt{6}}{7}$
 D) $\frac{4\sqrt{6}}{7}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
73. En un triángulo ABC se traza $\overline{BH}$ perpendicular a la bisectriz interior trazado por el vértice C. Si $AB=15 \text{ cm}$, $BC=13 \text{ cm}$ y $AC=14 \text{ cm}$, entonces la longitud de $\overline{AH}$ es.
 A) $\sqrt{55}$ B) $\sqrt{59}$ C) $\sqrt{61}$
 D) $\sqrt{67}$ E) $\sqrt{75}$
74. En un triángulo ABC, $m\angle BAC=2m\angle BCA$. Si $AB=4 \text{ cm}$ y $BC=7 \text{ cm}$, entonces la longitud de $\overline{AC}$ es en cm.
 A) 6 B) 7 C) 8
 D) $\frac{33}{4}$ E) $\frac{17}{2}$
75. En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita al triángulo determina el punto de tangencia M en el lado AC. Si $AB=5 \text{ u}$, $BC=7 \text{ u}$ y $AC=6 \text{ u}$; entonces la longitud de $\overline{BM}$ (en u) es:
 A) 4,0 B) 5,0 C) 5,5
 D) 6,0 E) 6,5
76. Si el circunradio de un triángulo mide 9 dm , entonces el mayor valor entero de la medida de su inradio es:
 A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6
77. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, con centro en A se traza un arco de circunferencia de radio $\frac{AB}{2}$ que intercepta a la semicircunferencia en el punto O, si $AB=6 \text{ cm}$, calcule el radio (en cm) de la circunferencia tangente al radio $\overline{OB}$, al arco OC y al arco CB.
 A) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
 D) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
78. ABCD es un cuadrado circunscrito a una circunferencia C, tangente a $\overline{BC}$ y $\overline{DC}$ en los puntos N y M respectivamente, $\overline{AN} \cap C = \{Q\}$, $\overline{AM} \cap C = \{P\}$. Si $PQ = \sqrt{2} \text{ m}$ entonces el lado (en m) del cuadrado ABCD es:
 A) 7 B) 8 C) 9
 D) 10 E) 11

79. Se tiene 2 circunferencias secantes de radio r y R , en la circunferencia mayor se traza una cuerda BA cuya prolongación es tangente en T a la circunferencia menor. Si el centro O de la circunferencia menor pertenece a la circunferencia mayor y

$$OA \cdot OB = 6u^2. \text{ Halle (en } u^2) \text{ Rr.}$$

- A) 1,0 B) 1,5 C) 2,0
D) 2,5 E) 3,0

80. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia C. La suma de los productos de las longitudes de sus lados es $8R^2$. Si R es el radio de la circunferencia C, calcule la suma de las longitudes de las alturas.

- A) $\frac{R}{2}$ B) R C) 2R
D) 4R E) 6R

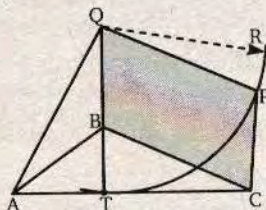
81. Un cuadrado ABCD de lado ℓ está inscrito en una circunferencia; M y F son puntos medios de AD y CD respectivamente. la prolongación de $\overline{FM}$ interseca a la circunferencia en E. Calcule ME.

- A) $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$ B) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{\ell\sqrt{3}}{4}$
D) $\frac{\ell\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\ell\sqrt{3}}{6}$

82. En un cuadrante AOB, con centro en B y radio $\overline{AB}$ se traza un arco que intercepta a la prolongación de $\overline{BO}$ en el punto P. Si $OA=OB=4u$, entonces la longitud (en u) del radio de la circunferencia tangente a los arcos $\overline{AB}$ y $\overline{AP}$, y tangente al lado $\overline{BP}$ es:

- A) 75 B) 1,6 C) 1,9
D) 2 E) 2,1

83. Del gráfico que se muestra, BQPC es un paralelogramo, sea T punto de tangencia. Si $(AB)^2 + (TC)^2 = K$, calcule AO.

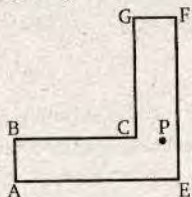


- A) $\sqrt{K}$ B) $2\sqrt{K}$ C) K
D) $K/2$ E) K^2

84. Del gráfico, calcule:

$$(PF)^2 + (PC)^2 + (PA)^2$$

Si $PG=a$; $PB=b$ y $PE=c$



- A) $\sqrt[3]{abc}$ B) $\frac{abc}{a+c}$
C) $2(a^2 + b^2 + c^2)$
D) $\frac{abc}{a+c}$ E) $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

85. Desde un punto A exterior a una circunferencia se trazan la tangente $\overline{AC}$ (C punto de tangencia) y la secante diametral $\overline{APB}$. Si H es la proyección de B sobre $\overline{AC}$, tal que $AP=CH$, calcular el área de la región triangular ABC, siendo $AC=\sqrt{10}$ cm.

- A) 3 cm^2 B) 5 cm^2 C) 10 cm^2
D) 15 cm^2 E) $\sqrt{10} \text{ cm}^2$

86. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica "M" punto medio de $\overline{BC}$, luego por "C" se traza la tangente $\overline{CL}$ a la semicircunferencia cuyo diámetro es $\overline{BM}$, de modo que $m\angle ALB = 90^\circ$. Calcular BL, si $AL = 8$ u.

A) 2 u B) 4 u C) 6 u
D) $2\sqrt{2}$ u E) $4\sqrt{2}$ u

87. La suma de los cuadrados de los radios de dos circunferencias concéntricas es 8 cm^2 . En la circunferencia mayor se traza la cuerda AB que intersecta a la otra en los puntos P y Q, luego en la circunferencia menor se traza la cuerda PC (PC $\perp$ AB).

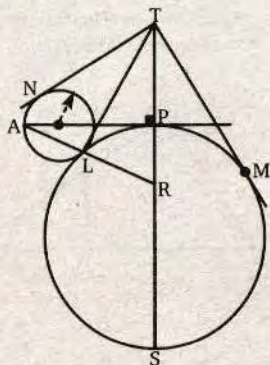
$$AP^2 + BP^2 + CP^2$$

A) 8 cm^2 B) 16 cm^2 C) 18 cm^2
D) 24 cm^2 E) 32 cm^2

88. Según el gráfico: N, L, P y M son puntos de tangencia, siendo:

$$(TP)(RS) = 8 \text{ m}^2.$$

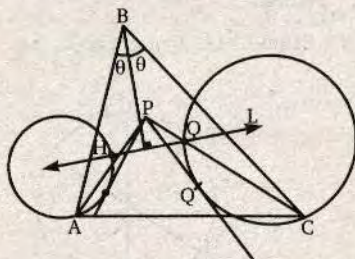
$$\text{Calcular } TM^2 - TN^2.$$



A) 4 m^2 B) 6 m^2 C) 8 m^2
D) 10 m^2 E) 12 m^2

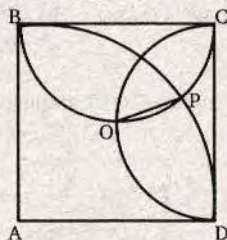
89. Calcular $\frac{PT}{PQ}$, si H: ortocentro,

O: circuncentro, ambos del $\triangle ABC$, T y Q son puntos de tangencia.



A) 2 B) 4 C) 1
D) 0,5 E) 1,5

90. Del gráfico que se muestra, calcule PO.
AB = K.



A) K B) $K\sqrt{10}$ C) $\frac{K}{2}$
D) $\frac{K\sqrt{10}}{10}$ E) $K\sqrt{2}$

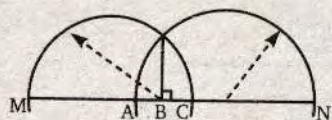
91. En el arco AB de la circunferencia circunscrita a un exágono regular ABCDEF de lado "a" se ubica el punto P; calcular:

$$(AP)^2 + (PB)^2 + (PC)^2 + (PD)^2 + (PE)^2 + (PF)^2$$

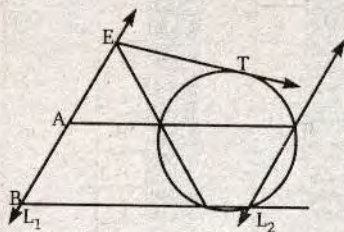
A) $6a^2$ B) $8a^2$ C) $9a^2$
D) $10a^2$ E) $12a^2$

- A) $\frac{m^2}{18}$ B) $\frac{m^2}{9}$ C) $\frac{m^2}{16}$
D) $\frac{4m^2}{9}$ E) $\frac{3m^2}{4}$

97. Del gráfico, $BC=2(AB)$. Calcule $\frac{AM}{CN}$.



- A) 1 B) 2 C) $\frac{1}{2}$
 D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\sqrt{2}$
98. En la figura: $L_1 // L_2$, $EA=m$, $AB=n$. Halle ET.



- A) $\frac{m^2 + n^2}{m}$ B) $\frac{m^2 - n^2}{2}$
 C) $\sqrt{(m+n)m}$
 D) $\sqrt{mn}$ E) $\sqrt{m^2 + n^2}$

99. En el paralelogramo ABCD, se dibuja una circunferencia que pasa por el vértice A y por los puntos medios O y M de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. La circunferencia intercepta a la prolongación de AD en el punto N.

Si $AB^2 + 2AD \cdot AN = 289 u^2$, entonces la longitud (en u) de $\overline{AC}$ es:

- A) 17 B) 15 C) 16
 D) 14 E) 13

100. En un triángulo ABC, de incentro I y semiperímetro p. Si $AB=c$, $BC=a$ y $AC=b$, entonces la longitud del radio de la circunferencia al triángulo AIC es:

- A) $\frac{b}{2} \sqrt{\frac{ac}{p(p-b)}}$
 B) $\frac{b}{2} \sqrt{\frac{bc}{p(p-c)}}$
 C) $\frac{b}{2} \sqrt{\frac{p(p-c)}{ac}}$
 D) $\frac{b}{2} \sqrt{p(p-b)}$
 E) $\frac{b}{2} \sqrt{\frac{abc}{(p-a)(p-c)}}$

**CLAVES**

1	A
2	C
3	B
4	B
5	B
6	D
7	C
8	C
9	D
10	A
11	B
12	B
13	E
14	B
15	B
16	D
17	A
18	E
19	E
20	B
21	B
22	A
23	B
24	E
25	C

26	C
27	C
28	D
29	D
30	B
31	E
32	B
33	B
34	A
35	C
36	A
37	D
38	D
39	E
40	E
41	C
42	B
43	E
44	B
45	E
46	B
47	E
48	E
49	B
50	B

51	C
52	B
53	
54	A
55	B
56	D
57	C
58	E
59	B
60	C
61	B
62	E
63	C
64	E
65	C
66	C
67	B
68	B
69	B
70	E
71	E
72	D
73	C
74	D
75	B

76	C
77	D
78	D
79	E
80	D
81	E
82	C
83	A
84	C
85	B
86	E
87	B
88	C
89	C
90	D
91	E
92	A
93	E
94	E
95	E
96	B
97	C
98	C
99	A
100	A

EXÁMENES DE ADmisión UNVI

UNI - 2007 - I

PROBLEMA 01: Determine $\tan(\alpha)$ en la figura mostrada en la figura mostrada si $\overline{AB} = \overline{BC}$ y M punto medio de AB, donde $\overline{DM} \parallel \overline{BC}$.

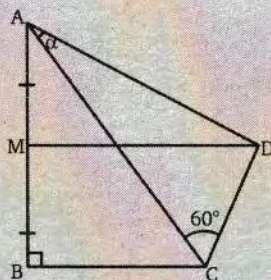
A) $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

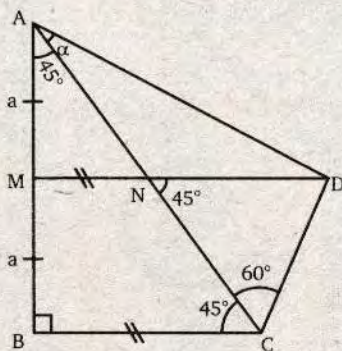
C) $\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$

D) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$

**Resolución:**

Del enunciado :

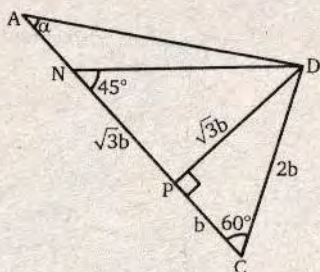
Datos: $\overline{AB} = \overline{BC}$; M : punto medio de AB

Por propiedad:

$$\overline{AN} = \overline{NC}$$

...(1)

En el triángulo ADC; asumimos $DC=2b$:



Del gráfico:

$$\overline{NC} = \sqrt{3}b + b \quad \dots(2)$$

Reemplazando (2) en (1);

$$\overline{AN} = \overline{NC}$$

$$\overline{AN} = \sqrt{3}b + b \quad \dots(3)$$

Calculo de $\tan \alpha$, en el triángulo ADP:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{DP}}{\overline{AN} + \overline{NP}}$$

Reemplazando valores de (2), (3) y gráfico:

$$\tan \alpha = \frac{b\sqrt{3}}{(b\sqrt{3} + b) + b\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 02:

En un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} = \overline{BC} = 13$ cm), $\overline{AC} = 10$ m, se traza a la altura $\overline{BH}$ y luego se construye el cuadrado BHEF perpendicular al plano del triángulo. Calcule el área del triángulo FHA.

A) $20\sqrt{2}$

B) $25\sqrt{2}$

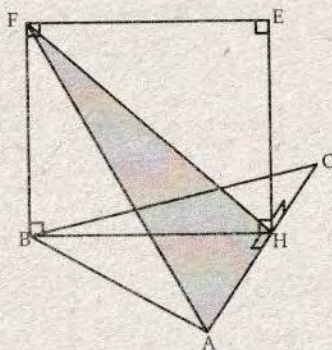
C) $30\sqrt{2}$

D) $35\sqrt{2}$

E) $40\sqrt{2}$

Resolución:

Del enunciado:



Datos:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{BC} = 13\text{m} \\ \overline{AC} = 10\text{ m} \end{array} \right\} \quad \dots(1)$$

Como el triángulo ABC es isósceles, la altura BH también es mediana:

$$\text{De (1):} \quad \overline{AH} = \overline{HC} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 5\text{ m} \quad \dots(2)$$

Aplicando Pitágoras en el $\triangle ABH$:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$$

De (1) y (2):

$$\begin{aligned} 13^2 &= 5^2 + \overline{BH}^2 \\ \Rightarrow \overline{BH} &= 12 \quad \dots(3) \end{aligned}$$

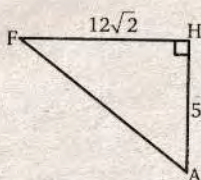
Además, como BH es el lado del cuadrado BHEF, entonces la diagonal FH es:

$$\text{De (3):} \quad \overline{FH} = \sqrt{2\overline{BH}} = \sqrt{2}(12) \quad \dots(4)$$

Por el teorema de las tres perpendiculares:

$$\begin{aligned} \overline{FB} &\perp \text{plano}(ABC) \text{ y } \overline{BH} \perp \overline{AC} \\ \Rightarrow \overline{FH} &\perp \overline{AC} \end{aligned}$$

El área del triángulo FHA:



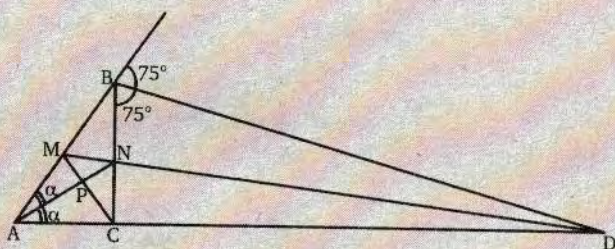
$$S_{FHA} = \frac{\overline{FH} \times \overline{HA}}{2}$$

De (2) y (4):

$$\begin{aligned} &= \frac{(12\sqrt{2})(5)}{2} \\ &= 30\sqrt{2} \text{ ; (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Rpta.: C

PROBLEMA 03: En la figura mostrada, calcule la mediana del ángulo APC.



A) 100°

B) 105°

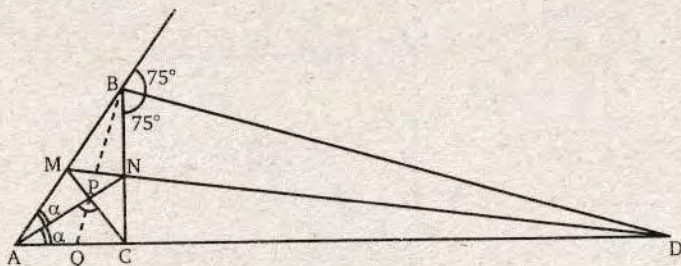
C) 110°

D) 115°

E) 120°

Resolución:

Del enunciado y complemento datos:



Se traza la ceviana BQ que pase por P

Luego aplicamos los siguientes teoremas:

- I) Teorema de la bisectriz exterior en el triángulo ABC, donde BD es la bisectriz exterior.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \quad \dots(1)$$

- II) Teorema de Ceva, en el triángulo ABC:

$$(\overline{AM})(\overline{BN})(\overline{CQ}) = (\overline{BM})(\overline{CN})(\overline{AQ})$$

$$\frac{(\overline{AM})(\overline{BN})}{(\overline{MB})(\overline{CN})} = \frac{(\overline{AQ})}{(\overline{CQ})} \quad \dots(2)$$

- III) Teorema de Menelao, en el triángulo ABC y la recta secante $\overline{MD}$.

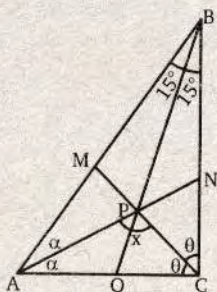
$$(\overline{AM})(\overline{BN})(\overline{CD}) = (\overline{MB})(\overline{NC})(\overline{AD})$$

$$\Rightarrow \frac{(\overline{AM})(\overline{BN})}{(\overline{MB})(\overline{NC})} = \frac{(\overline{AD})}{(\overline{CD})}$$

De (2) y (1):

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

De esta última expresión, por el teorema de la bisectriz interior, dado que $\overline{BQ}$ es bisectriz (P es incentro).



En el triángulo ABC:

$$2\alpha + 2\theta + 30^\circ = 180^\circ$$

$$2(\alpha + \theta) = 150^\circ$$

$$\alpha + \theta = 75^\circ \quad \dots(3)$$

En el triángulo APC:

$$\alpha + \theta + x = 180^\circ$$

De (3):

$$75 + x = 180^\circ$$

$$\Rightarrow x = 105^\circ$$

También por propiedad:

$$x = 90^\circ + \frac{m\angle ABC}{2}$$

$$= 90^\circ + \frac{30^\circ}{2}$$

$$= 105^\circ$$

Rpta.: B

PROBLEMA 04:

Se tiene un triángulo equilátero, donde la distancia del ortocentro a la recta que une los puntos medios de dos lados del triángulo es 2, calcule la longitud del lado del triángulo.

A) 2

B) $2\sqrt{3}$

C) 4

D) $4\sqrt{3}$

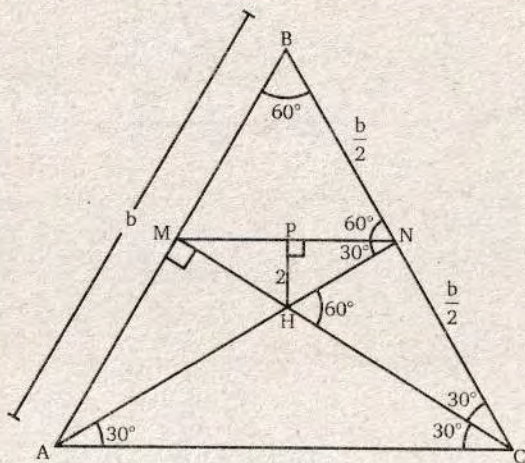
E) $8\sqrt{3}$

Resolución:

Por teoría, en un triángulo equilátero:

$$\begin{aligned}\text{Ortocentro (H)} &= \text{Baricentro (G)} \\ &= \text{Incentro (I)} \quad \dots(1)\end{aligned}$$

Del enunciado y de (1):



Del gráfico:

$$\text{sen} 30^\circ = \frac{\overline{HP}}{\overline{HN}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\overline{HN}} \Rightarrow \overline{HN} = 4 \quad \dots(2)$$

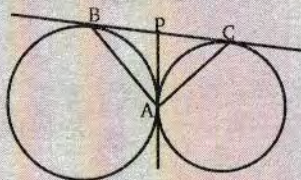
También:

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{CN}}{\overline{HN}}$$

$$\text{De (2):} \quad \sqrt{3} = \frac{b/2}{4} \Rightarrow b = 8\sqrt{3}$$

Rpta.: E

PROBLEMA 05 : En la figura, A, B y C son puntos de tangencia.
Sea P un punto del segmento BC tal que PA es tangente común a las circunferencias. Si $AP = 10\text{ m}$ y $AB - AC = 4\text{ m}$, calcule el área del triángulo APB.



A) 48 m^2

B) 49 m^2

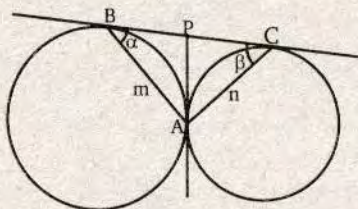
C) $22\sqrt{10}\text{ m}^2$

D) $45\sqrt{2}\text{ m}^2$

E) $25\sqrt{5}\text{ m}^2$

Resolución:

Del enunciado:



Datos:

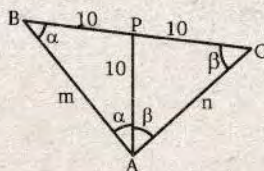
$\overline{AP} = 10\text{ m} \quad \dots(1)$

$\overline{AB} - \overline{AC} = 4\text{ m} \quad \dots(2)$

Por propiedad de tangencia:

De (1): $\overline{BP} = \overline{PC} = \overline{PA} = 10\text{ m}$

Entonces AP es mediana:



Donde:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Se concluye que el $\triangle BAC$ es rectangular A.

Del gráfico:

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= (20)^2 \\ &= 400 \end{aligned} \quad \dots(3)$$

Por dato del problema:

$$\begin{aligned} \overline{AB} - \overline{AC} &= 4 \\ m - n &= 4 \\ (m - n)^2 &= 16 \\ m^2 + n^2 - 2mn &= 16 \end{aligned}$$

De(3):

$$\begin{aligned} 400 - 2mn &= 16 \\ \Rightarrow mn &= 192 \end{aligned} \quad \dots(4)$$

Calculo del área del triángulo APB, considerando que $\overline{PA}$ es mediana:

$$\begin{aligned} \Rightarrow A_{APB} &= \frac{A_{ABC}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{m \cdot n}{2} \right) \end{aligned}$$

De(4):

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{192}{2} \right) \\ &= 48 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Rpta.: A

PROBLEMA 06:

En el interior de un triángulo ABC ($AB=BC$), se toma el punto "P" tal que $m\angle PBA=10^\circ$, $PB=AC$ y $m\angle PBC=30^\circ$.
Halle $m\angle PAB$.

A) 10°

B) 15°

C) 20°

D) 25°

E) 30°

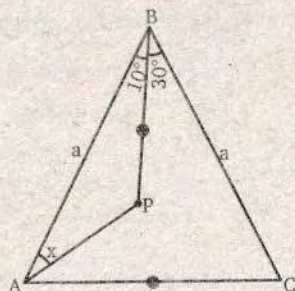
Resolución:

Graficando según el enunciado:

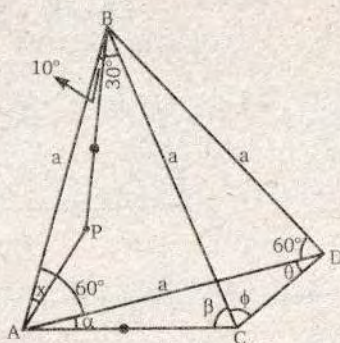
Datos:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = a$$

$$\overline{BP} = \overline{AC}$$



De los vértices A y B trazamos dos segmentos de recta de longitud a , de tal manera que se forma un triángulo equilátero ABD.



Como el triángulo BCD es isósceles, entonces:

$$\phi = \theta + 60^\circ \quad \dots (1)$$

En el triángulo BCD, por propiedad de suma de ángulos internos:

$$20^\circ + \phi + (\theta + 60^\circ) = 180^\circ$$

De (1):

$$(\theta + 60^\circ) + \theta = 100^\circ$$

$$\theta = 20^\circ$$

Pero el triángulo ABC también isósceles, entonces:

$$\beta = 60^\circ + \alpha \quad \dots (2)$$

Por suma de ángulos internos, en el triángulo ABC:

$$(10^\circ + 30^\circ) + (60^\circ + \alpha) + \beta = 180^\circ$$

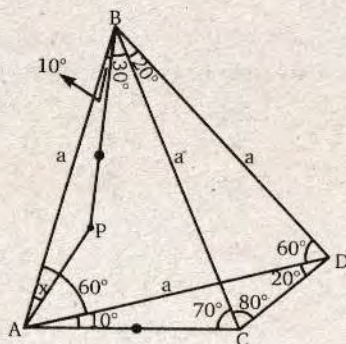
$$\alpha + \beta = 80^\circ$$

De (2):

$$\alpha + (60^\circ + \alpha) = 80^\circ$$

$$\alpha = 10^\circ$$

Luego tenemos el gráfico así:



El triángulo ABP es congruente al triángulo ADC, por lo tanto podemos deducir que:

$$\theta = x = 20^\circ$$

Rpta.: C

PROBLEMA 07: En un triángulo de lados 7, 8 y 9 m se traza una mediana relativa al lado de 8 m. Determine el coseno del ángulo comprendido entre el lado 7 m y la mediana trazada.

A) $\frac{41}{49}$

B) $\frac{43}{49}$

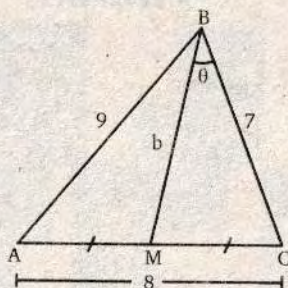
C) $\frac{45}{49}$

D) $\frac{46}{49}$

E) $\frac{47}{49}$

Resolución:

Del enunciado:



Por relaciones métricas (teorema de la mediana):

$$2\overline{BM}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{2} = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2$$

$$2b^2 + \frac{8^2}{2} = 7^2 + 9^2$$

$$\Rightarrow b = 7 \quad \dots(*)$$

Por ley de cosenos:

$$4^2 = 7^2 + b^2 - 2(7)(b)\cos\theta$$

De (*):

$$16 = 49 + 7^2 - 2(7)(7)\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{41}{49}$$

Rpta.: A

NUESTRAS PUBLICACIONES

LIBROS



RESÚMENES TEÓRICOS



TEMAS SELECTOS



*El que ama la instrucción
ama la sabiduría. Prov. 12.1*

PEDIDOS: 528 - 1921 / 423 - 8072

TEMARIO GEOMETRÍA



T. S.	TEMA
1	Segmentos - Ángulos
2	Triángulos (Propiedades, Clasificación, Congruencia y Aplic.)
3	Cuadriláteros - Polígonos
4	Circunferencia (Propiedades, ángulos de la circunferencia, cuadriláteros inscrito e inscriptible, posiciones relativas)
5	Proporcionalidad y Semejanza Triángulos - R. M. Circunferencia
6	Relaciones Métricas en Triángulos y en Cuadriláteros
7	Áreas (Triangulares - Cuadrangulares y Circulares)
8	Rectas y Planos - Diedros y Triedros
9	Poliedros y Poliedros Regulares
10	Prisma - Pirámide
11	Cilindro - Cono
12	Esfera - Teorema de Pappus
13	Polígonos Regulares - Simetría - Longitud de la Circunferencia
14	Conjuntos Convexos

Teléfonos: 424 - 6350
992 - 796104

 / **fondoeditorialrodo**
editorialrodo@gmail.com